

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

27. Band, Heft 4

1. April 1943

S. 145—192

Philosophie. Logik.

Draeger, Max: Mathematik und Rasse. Dtsch. Math. 6, 566—575 (1942).

Nach einer kurzen Einleitung, in der sich Verf. gegen den möglichen Vorwurf der billigen Ausnutzung einer bestehenden Konjunktur verwahrt, gibt er einen Überblick über die Arbeiten von F. Klein, Th. Vahlen und L. Bieberbach zum Thema. Er untersucht sodann die Frage, ob die Mathematik als solche rassisch bedingt sei. Er bejaht den Zusammenhang und stellt fest, daß es sich dabei nicht um den materialen Wahrheitsgehalt der Mathematik, sondern um ihre Struktur handelt, die sich in dreifacher Weise darstellt, nämlich material (Aufbau der Teilgebiete und ihre gegenseitigen Beziehungen), formal (Methodik im Sinne der zugrunde liegenden Konzeption) und philosophisch (erkenntnis-kritisch hinsichtlich der Grundauffassung und Begriffsbildung, metaphysisch insofern Mathematik ein Kultursymbol ist). Im dritten Abschnitt wird das Wesen der modernen Mathematik dargelegt; es ist gekennzeichnet durch die Begriffe der Funktion, der geometrischen Verwandtschaften und des Infinitesimalen. Im Schlußabschnitt wird die Zahlentheorie als wesentlicher Bestandteil deutscher Mathematik gerühmt und die Überbetonung der Anwendungen als Amerikanismus getadelt. — Die Arbeit gibt, ohne wesentlich neue Gesichtspunkte zu bringen, eine gedrängte Darstellung der vorerst noch in den Anfängen steckenden Einsichten über die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Rasse. Zu einzelnen Urteilen und Deutungen kritisch Stellung zu nehmen, ist hier nicht der Ort. *E. Löffler.*

Newsom, C. V.: Mathematics and the sciences. Science, New York 94, 27—31 (1941).

Der Aufsatz gibt einen Vortrag wieder, den Verf. beim Rücktritt von der Präsidentschaft der südwestlichen Abteilung der „American Association for the Advancement of Science“ am 30. IV. 1941 gehalten hat. Er weist darauf hin, daß trotz der unbestreitbaren gegenseitigen Abhängigkeit von mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschung eine ernsthafte Besinnung über die Beziehungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaft erst im 20. Jahrhundert einsetzt und daß solche Untersuchungen dazu geführt haben, gewisse Wissenszweige, die früher einer mathematischen Behandlung nicht zugänglich waren, einer solchen zu unterwerfen. Die Aufgabe und Leistung der reinen Mathematik sieht Verf. in der Konstruktion logisch-deduktiver Systeme (Modelle, Skelette), die auf gewissen Axiomen aufgebaut sind. Ein solches System erhält Bedeutung für ein gewisses Teilgebiet der Naturwissenschaft, wenn es gelingt, die Grundtatsachen dieses Teilgebietes so zu deuten, daß sie formal den Axiomen jenes mathematischen Systems entsprechen. Dann entsteht zwischen der mathematischen Theorie und der mit ihrer Hilfe geordneten Naturwissenschaft eine formale Identität oder eine Isomorphie. Da ein abstrakter Kalkül einer erweiternden logisch-formalen Deduktion leichter zugänglich ist als ein System gedeuteter Grundbegriffe, wird ein solches Abbildungsverfahren stets dazu führen, daß die Erkenntnis auf dem naturwissenschaftlichen Gebiet, dem das mathematische Gerüst angepaßt ist, vertieft und erweitert wird. Verf. zeigt, daß schon Archimedes, Newton, Lagrange bei der Behandlung physikalischer Probleme in dieser Weise vorgegangen sind, und gibt auch aus neuerer Zeit Beispiele. Er zeigt aber auch die Grenzen der Leistungsfähigkeit mathematischer Methoden auf und erinnert daran, daß kein mathematisches System der verwickelten Naturwirklichkeit bis in alle Einzelheiten gerecht werden kann. Zum Schluß weist er darauf hin, daß die eigentümliche Verwandtschaft zwischen Mathematik und Naturwissenschaft noch viele ungelöste Probleme darbietet und fordert Mathematiker und Naturwissenschaftler auf, sich der Erforschung dieser Probleme zu widmen, weil daraus Fortschritte in der Beherrschung der Natur zu erwarten sind.

E. Löffler (Stuttgart).

Johannesson, Jürg: Das Verhältnis von Mathematik, Naturwissenschaften und Technik zueinander. Naturwiss. 30, 113—119 (1942).

Ausgehend von der oft gestellten Frage nach dem Verhältnis der Wissenschaften zum Leben, die in neuerer Zeit von Max Weber und Ed. Spranger für die Geisteswissenschaften, von D. Hilbert für die Mathematik erörtert wurde, schlägt Verf. zum

Vergleich der Wissenschaften (Mathematik und Physik) und der Technik einen neuen Weg ein, indem er die einzelnen Gebiete bezüglich der an sie gewendeten menschlichen Arbeit in Beziehung setzt. Er betrachtet das „Modell“ als ein Phänomen, das allen drei Gebieten gemeinsam angehört und von dem aus ihre objektive Nebeneinanderstellung möglich ist. Eine sprachliche Analyse führt zu dem Ergebnis, daß im Modell sowohl der Begriff der Maßstäblichkeit als auch der Begriff des Demonstrationsgegenstandes steckt. An Beispielen aus dem Gebiet der Mathematik, der Physik und der Technik wird gezeigt, daß allen hier verwendeten Modellen diese Doppel-eigenschaft zukommt, daß sie daneben aber noch die weitere Eigenschaft haben, ein „Anderes“ oder gar „Fremdes“ zu sein, indem sie sich der Vorstellungen eines fremden Gebietes bedienen und das jeweils vorliegende Problem, zu dessen Lösung sie konstruiert wurden, in Analogie mit diesem fremden, im allgemeinen schon etwas bekannteren Gebiet setzen. Dadurch bereichert das Modell nicht nur die Ausdrucksmittel, sondern auch den Inhalt der drei Disziplinen. Es spielt eine ähnliche Rolle wie der Dualis innerhalb der Sprache und schiebt sich zwischen den einmaligen Lösungsversuch einer gestellten Aufgabe und die allgemeine vorläufig abschließende Lösung. Es stellt sich als ein Grundphänomen dar, auf Grund dessen sich eine gegenseitige Verständigung der Mathematiker, Physiker und Techniker ergibt. Daraus folgt die Ablehnung des Solipsismus und des utilitaristischen Realismus, die Aufdeckung des gemeinsamen sozialen Charakters der Mathematik, der Naturwissenschaft und der Technik und die Forderung, jedes der Gebiete für sich so verständlich wie möglich und die Gebiete einander gegenseitig so befruchtend wie möglich zu gestalten. Die Gegensätzlichkeit, die zwischen den Belangen der Einzeldisziplinen untereinander wie auch in bezug auf ihre Gesamtheit als wissenschaftlich-technischer Ausschnitt des sozialen Lebens besteht, wird somit durch die Verständigung mittels Modellbildung überbrückt. — Die Arbeit, die weniger durch ihr Ergebnis als durch ihre Beweisführung interessant ist, bestätigt die bekannte Erfahrung, daß Fortschritte in Wissenschaft und Praxis immer dann erzielt werden, wenn es gelingt, bisher getrennte Gebiete mit Hilfe einer isomorphen Analogie miteinander in Beziehung zu setzen.

E. Löffler (Stuttgart).

Gerlach, Walther: Die Anfänge naturwissenschaftlicher Forschung. Ber. naturforsch. Ges., Freiburg i. Br. 37, 111—127 (1942).

In meisterhaftem Vortrag erläutert der Redner an historischen Beispielen Wesen und Grenzen naturwissenschaftlicher Forschung. Ausschlaggebend ist die Fähigkeit zur richtigen Fragestellung. „Was ist Schwere, was ist Gravitation, was ist elektrische und magnetische Kraft — das sind bis heute keine produktiven Fragen. Die physikalische Fragestellung lautet etwa: Wann entsteht eine magnetische Kraft, wie ist ihre räumliche Verteilung, wovon hängt ihre Stärke ab, ist sie immer da — nur quantitativ verschieden — oder tritt sie nur unter bestimmten Bedingungen auf und unter welchen?“ J. Kepler habe nach unserer Auffassung die Aufgabe des Naturwissenschaftlers überspannt, wir müssen, so bemerkt der Redner, abschließend mit einem Wort von G. Mie, „verstehen, daß die Naturwissenschaft nicht Alles ist“.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

● **Scholz, Heinrich: Zur Erhellung des Verstehens.** Leipzig: Quelle & Meyer 1942. 20 S. Spranger Festschrift.

Diese Arbeit ist in der Festschrift zu Eduard Sprangers 60. Geburtstag erschienen. Sie knüpft an den mißglückten Versuch Fichtes in seinem „Sonnenklaren Bericht“, die Leser zum Verstehen seiner Philosophie zu zwingen, und an Sprangers Erkenntnis, daß das Verstehen die Funktion ist, auf deren planmäßiger Ausübung die geisteswissenschaftliche Forschung beruht. Verf. zeigt, daß die mathematische Grundlagenforschung in der Lage ist, für einen abstrakten Kalkül, d. h. für ein ungedeutetes System von Symbolen, über deren Gebrauch in ganz bestimmter Weise verfügt wird, solche Deutungen anzugeben, daß sie mit mathematischer Genauigkeit übersehen werden können. Dadurch wird aus dem abstrakten Kalkül ein verständlicher Kalkül

oder eine formalisierte Sprache. — Das Verfahren wird erläutert an einem elementaren abstrakten Kalkül, der von Gottlob Frege (1848—1925) geschaffen wurde und deshalb Frege-Kalkül genannt wird. Unter Verwendung des Deutungsbegriffes, den der polnische Grundlagenforscher A. Tarski (1936) entwickelt hat, werden dann für den Frege-Kalkül zwei Deutungen gegeben. Die erste bezieht sich auf Gedanken, die durch Aussagen aus dem Bereich der Arithmetik der natürlichen Zahlen ausgedrückt werden können. Die zweite liegt im Bereich der Zahlentheorie. Beide Deutungen sind von demselben Genauigkeitsgrad und erreichen eine Genauigkeit in den kleinsten Teilen. — Wer den in der Arbeit festgelegten Begriff der „Deutung“ annimmt und sich die (allerdings nicht geringe) Mühe gibt, den Aufbau des Frege-Kalküls und die logisch-rechnerische Darstellung seiner Deutungen zu beherrschen, der ist allerdings „zum Verstehen gezwungen“. Für einen zusätzlichen Appell an den guten Willen des Lesers und für irgendwelche philosophische Spekulationen bleibt kein Raum. Zugänglich ist die hier geleistete Präzisionsarbeit nur für den, der die mathematische Sprache versteht und eine gründliche mathematische Schulung besitzt.

Eugen Löffler (Stuttgart).

● **Scholz, Heinrich: Metaphysik als strenge Wissenschaft.** Köln: Staufen-Verl. 1941. 188 S. geb. RM. 5.40.

Unter Metaphysik wird hier im wesentlichen die moderne Logistik verstanden, für die der Verf. den Namen einer „Metaphysik“ in sehr beredter Weise in Anspruch zu nehmen weiß. Um von dieser neuen Metaphysik eine Vorstellung zu geben, wird ein eng begrenztes Teilgebiet ausgewählt, nämlich die Theorie der Identität und der Verschiedenheit. Es ist sehr bemerkenswert, wie es gelingt, an Hand dieses Teilgebietes die wichtigsten Begriffe der Logistik und der modernen Grundlagenforschung zu erläutern. Die zugrunde gelegte formale Sprache beschränkt sich auf die Ausdrücke, die mit Hilfe der Grundrelation der Identität, der Aussageverknüpfungen und der Quantifikatoren sich aufbauen lassen. — Zunächst wird die Abhängigkeit des Wahrheitswertes einer Aussage von der Anzahl der Dinge in dem zugrunde gelegten Individuenbereich erläutert. Es folgt eine Präzisierung des Begriffs der Erfüllbarkeit, die es ermöglicht, in einem genau bestimmten Sinne von der Allgemeingültigkeit, Nichtallgemeingültigkeit und Neutralität von Aussagen der vorliegenden Theorie zu sprechen. Weiter wird eine Lösung des Entscheidungsproblems auf semantischer Grundlage gegeben, d. h. es wird ein Verfahren angegeben, das bei einer vorgelegten identitätstheoretischen Aussage die effektive Entscheidung darüber gestattet, für welche Individuenbereiche sie gültig ist. Für das die Grundlage dieses Verfahrens bildende, auf Löwenheim, Skolem und Behmann zurückgehende Reduktionsverfahren mußte aus Raumangel auf die Literatur verwiesen werden. Es folgt ein Axiomensystem für die Theorie der Identität und Verschiedenheit, bei der die besonders saubere Herausarbeitung des Folgerungsbegriffs bemerkenswert ist. Als Grundformeln werden außer den Formeln $(x)(x \equiv x)$ und $(x)(y)(z)((x \equiv z \& y \equiv z) \rightarrow x \equiv y)$ alle die Formeln genommen, die aus einer aussagenlogischen Identität durch Einsetzung von identitätstheoretischen Ausdrücken und evtl. Vorsetzen der zu den freien Variablen gehörigen Allzeichen entstehen. Die aussagenlogischen Identitäten werden dabei nicht axiomatisch, sondern durch Bewertung gewonnen. Dazu kommen sieben Ableitungsregeln, die vollfreie Umbenennung, die gebundene Umbenennung, die Abtrennung, die vordere und hintere Generalisierung und die vordere und hintere Partikularisierung. Die Vollständigkeit des Axiomensystems, die besagt, daß jede identitätstheoretische Aussage entweder im Axiomensystem beweisbar oder widerlegbar oder äquivalent mit einer numerischen Aussage ist, d. h. mit einer Aussage, die Angaben über die Anzahl der Elemente im Individuenbereich macht, konnte im Rahmen des Buches nur erwähnt werden. — Wiederholt wird noch in dem Werk an Hand der vorliegenden Theorie der für die Grundlagenforschung so wichtige Satz erläutert, daß die Ausdrucksmittel einer jeden formalisierten Sprache begrenzt sind.

Ackermann (Burgsteinfurt).

● Church, A.: *Elementary topics in mathematical logic. A lecture given at the Galois Institute at Long Island University. 1. The algebra of classes. 2. The algebra of propositions. 3. Set theory.* Brooklyn, N. Y.: 1940/41. 102 pag.

Diese Hefte sind so verspätet hier eingetroffen, daß ich erst jetzt in der Lage bin, sie anzuzeigen. I enthält einen einführenden Überblick über die Algebra der Klassen auf intuitiver Basis (weder Formalisierung noch Axiomatisierung), mit Betonung der Theorie der Normalformen und der Eliminationstheorie. II enthält einen entsprechenden Überblick über die Algebra der zweiwertigen Wahrheitsfunktionen mit zahlreichen Anwendungen und mit einem Korrespondenzprinzip (S. 35), das ich hier nicht reproduziere, weil ich seine Formulierung nicht billigen kann. — III ist das Kernstück. Es enthält einen formalisierten mengentheoretischen Aufbau der Logik, der Algebra der Klassen und vor allem der Mathematik bis zur Analysis einschließlich. Basis: die Menge der aussagenlogischen Identitäten. 12 nicht-formalisierte, 9 formalisierte Axiome. Die nicht-formalisierten Axiome sind bis auf Ax. I (Einführung der Menge der aussagenlogischen Identitäten) als Regeln des Schließens formuliert: zwei Einsetzungsregeln für Aussagenvariable (II) und Objektvariable (IV), die Abtrennungsregel (III), eine Umbenennungsregel für gebundene Variable (V), vier Quantifizierungsregeln (VI—IX), sodann, entscheidend (siehe unten!), eine limitierte Komprehensionsregel (X), schließlich zwei Regeln, durch die der Schluß auf die Existenz gewisser wesentlicher Mengen gesichert wird (XI und XII). XII ist das Fraenkelsche Ersetzungsprinzip. — Von den neun formalisierten Axiomen ist (1) das Extensionalitätsaxiom, (2) bis (7) fordern die Existenz gewisser wesentlicher Mengen [(7) ist das Unendlichkeitsaxiom]. (8) ist das Auswahlaxiom, (9) das die Existenz von Urelementen sichernde Zermelosche Fundierungsaxiom [Fundam. Math. 16, 31 (1930)], aus dem sich die Beweisbarkeit von $\neg x \in x$ ergibt. In der vorliegenden Formalisierung lautet es so: Ax. 9. $x \in a \rightarrow Eb(b \in a \wedge \neg Ey(y \in a \wedge y \in b))$, wo „E“ das Symbol für „Es existiert wenigstens ein . . . , so daß“. — Ist A eine Formel, x eine Objektvariable $\neg x$ braucht in A nicht vorzukommen —, so ist $\widehat{x}A$ — die x , so daß A — ein Term. Daß A eine Klasse ist, werde symbolisiert durch „ KA “. Dann lautet das limitierte Komprehensionsaxiom so: Ax. X: Von $K\widehat{x}M$ darf geschlossen werden auf $x \in \widehat{x}M \leftrightarrow M$, wo M eine Formel ist; entsprechend für jede andere Objektvariable an Stelle von x . — Mit Hilfe dieses Axioms kann gezeigt werden, daß $\widehat{x}(\neg x \in x)$ keine Menge ist, obschon $x \in x$ eine Formel, $\neg x \in x$ sogar beweisbar ist. Hierdurch wird die Russellsche Antinomie zum Verschwinden gebracht, ohne daß von den typentheoretischen Beschränkungen der Formelmenge Gebrauch gemacht wird. — Auf Grund von Ax. X wird gesagt werden dürfen, daß die vorliegende Konstruktion sich an der entscheidenden Stelle stützt auf die Konstruktion von W. Ackermann, Mengentheoretische Begründung der Logik (vgl. dies. Zbl. 17, 242). Vgl. das Ackermannsche Axiomenschema III 1 (a. a. O. 8). Sie ist wie diese eine Formalisierung der Zermelo-Basis. Das System ist so konstruiert, daß die Menge der formalisierten Axiome endlich ist, also keine Axiomenschemata enthält. Es ist das erste mir bekannte System dieser Art. Es scheint mir, daß solche Systeme erstrebenswert sind, weil bei Zulassung von Axiomenschemata der wichtige Begriff des Axiomensystems und mit ihm der Begriff der Axiomatisierbarkeit schwerlich werden präzisiert werden können. Es ist zu bedauern, daß die auf der vorgetragenen Basis formalisierte Mathematik nicht mehr hat vorgetragen werden können.

Heinrich Scholz (Münster i. W.).

Rosser, Barkley: *The independence of Quine's axioms *200 and *201.* J. Symbolic Logic 6, 96—97 (1941).

Die vorliegende Note bezieht sich auf die Axiome *200 bzw. *201 in Quine, *Mathematical Logic*, New York 1940. Verf. zeigt, daß *200 aus den übrigen Axiomen nicht ableitbar ist. Für *201 zeigt Verf. dagegen die Unabhängigkeit nur, falls das Gesamt-Axiomensystem von Quine widerspruchsfrei ist. Er erhält darüber hinaus

das Corollar, daß, falls *201 aus den übrigen Axiomen ableitbar ist, das Rest-System widerspruchsvoll ist. *K. Schröter* (Berlin).

Moisil, Gr. C.: Sur la représentation des groupes abéliens infinis. 4. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **24**, 79—84 (1941).

Im Aussagenkalkül bilden die Aussagen eine Abelsche Gruppe, deren sämtliche Elemente die Ordnung 2 haben, falls man als Produkt zweier Aussagen x und y die durch die Äquivalenz erzeugte neue Aussage $x \sim y$ nimmt. (Vgl. dies Zbl. **25**, 8).

Ackermann (Burgsteinfurt).

Jeffreys, Harold: Aspects of mathematical logic. Nature, Lond. **148**, 396—397 (1941).

Verf. erwähnt einige bekannte Ergebnisse der modernen Logistik (z. B. von Gödel, Carnap und Quine) und vertritt den Standpunkt, daß es sich in der Logik und der Mathematik um das Studium abstrakter Sprachen handelt, während die Beurteilung der Anwendungsmöglichkeit den empirischen Wissenschaften zu überlassen ist.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Müller-Oekonomou, S.: Die drei fundamentalen Richtungen zur Begründung der mathematischen Wissenschaft. Bull. Soc. Math. Grèce **21**, 67—103 (1941) [Griechisch].

Gonseth, F.: Ist die Mathematik immer noch das theoretische Modell aller Wissenschaften? (Zürich, Sitzg. v. 3. XI. 1941.) Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **86**, H. 3/4, XIX—XX (1941).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● **MacDuffee, Cyrus C.:** An introduction to abstract algebra. New York: Wiley and Son 1941. VII, 303 pag. \$ 4.—

Montel, Paul: Sur les combinaisons avec répétitions limitées. Bull. Sci. math., II. s. **66**, 86—103 (1942).

Verf. behandelt nochmals das von P. Sergescu (s. dies. Zbl. **25**, 491) gelöste Problem von Kombinationen von n Elementen zur p -ten Klasse mit beschränkter Wiederholungszahl. Er gibt neben der von Sergescu herrührenden Formel eine formell verschiedene. Weiter gibt Verf. noch einige Anwendungen aus der algebraischen Geometrie auf die Theorie mehrfacher Punkte von Kurven und Flächen. *Holzer*.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Cherubino, Salvatore: Sulle condizioni di esistenza di una matrice di Riemann e sui moduli delle curve algebriche. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. **3**, 98—105 (1942).

Damit eine komplexe Matrix ω mit p Reihen und $2p$ Spalten als Periodenmatrix eines Abelschen Funktionenkörpers auftreten kann, ist notwendig und hinreichend, daß es zu ω eine alternierende Riemannsche Form gibt, die zu einer definiten quadratischen Form führt. Die Bedingungen dafür werden in einer von Scorza abweichenden, mehr symmetrischen Form gefunden. *van der Waerden* (Leipzig).

Ko, Chao, and H. C. Lee: Note on a theorem on matrices. J. London Math. Soc. **15**, 149—152 (1940).

Es handelt sich um den folgenden merkwürdigen Satz: Sind A und B rechteckige Matrizen vom gleichen Typus (m, n) , ist r der Rang von A und sind für ein festes $s < r$ je zwei entsprechende Unterdeterminanten s -ten Grades von A und B einander gleich, so ist $B = \varrho A$, wo ϱ eine s -te Einheitswurzel bedeutet. — Dieser Satz wurde (für den Fall $m = n$) von Schouten durch geometrische Betrachtungen bewiesen (vgl. Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, S. 36, Groningen 1936; dies. Zbl. **11**, 174). Verff. geben einen elementaren algebraischen Beweis, der zugleich zeigt, daß, falls die Voraussetzung über die Unterdeterminanten von A und B für $s = r$ erfüllt ist (in diesem Fall gilt die Behauptung nicht mehr), B denselben Rang hat wie A . Sie geben ferner einen zweiten Beweis, der wie

der von Schouten tensorielle Hilfsmittel benutzt, aber zugleich die im Fall $s = r$ zwischen A und B bestehende Relation liefert: Es lassen sich Matrizen U vom Typus (m, r) , V vom Typus (r, n) und R vom Typus (r, r) mit $|R| = 1$ angeben, so daß $A = UV$, $B = URV$ ist. Rohrbach (Prag).

Ko, Chao, and H. C. Lee: Further generalization of the Hamilton-Cayley theorem. J. London Math. Soc. **15**, 153—158 (1940).

Verff. zeigen: Ist $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ein Polynom über dem Ring R der n -reihigen Matrizen und $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ die Determinante von $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, sind ferner X_1, X_2, \dots, X_m paarweise vertauschbare Matrizen aus R , die die Gleichung $F(X_1, X_2, \dots, X_m) = 0$ erfüllen, so ist auch $f(X_1, X_2, \dots, X_m) = 0$. — Für $m = 1$, $F(x) = Ex - X$ (E Einheitsmatrix aus R), $f(x) = |Ex - X|$ ergibt sich der Satz von Cayley-Hamilton, der von Phillips [Amer. J. Math. **41**, 266—278 (1919)] auf den Fall verallgemeinert wurde, daß $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine Linearform über R ist. Verff. geben die weitgehende obige Verallgemeinerung und zeigen ferner, daß auch die Frobeniussche Verschärfung der Cayley-Hamilton-Relation, daß $f(x)$ durch das Minimalpolynom $\psi(x)$ ersetzt werden darf, gültig bleibt. Für den Satz von Phillips ist dies bereits von Ostrowski nachgewiesen worden [Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 1—4 (1939); dies. Zbl. **20**, 198]. Die weitere Aussage von Frobenius, daß jedes $f(x)$ mit $f(X) = 0$ durch $\psi(x)$ teilbar ist, gilt zwar noch für den Phillipsschen Fall (vgl. Ostrowski), aber, wie Verff. zeigen, nicht mehr allgemein für ein beliebiges Polynom. Rohrbach (Prag).

Mirimanoff, D.: Expressions de la somme $x_1 + x_2$ de deux indéterminées x_1, x_2 en fonction de $x_1 x_2 + c(x_1 + x_2)$. Comment. math. helv. **14**, 310—313 (1942).

Das Problem, $p = x_1 + x_2$ durch $G = x_1 x_2 + c(x_1 + x_2)$ und durch die elementarsymmetrischen Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n auszudrücken, kann durch die einfache Transformation $x'_i = x_i + c$ auf das in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **25**, 241) gelöste Problem, $x_1 + x_2$ durch $x_1 x_2$ und die symmetrischen Funktionen auszudrücken, zurückgeführt werden. — Zwei merkwürdige Eigenschaften der a. a. O. eingeführten Polynome R_i . van der Waerden (Leipzig).

Mirimanoff, D.: Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme. Comment. math. helv. **15**, 45—58 (1942).

Zwei Methoden werden angegeben, die zu einem Ausdruck von $q = x_1 x_2$ als Funktion von $p = x_1 + x_2$ und den elementarsymmetrischen Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n führen. Die erste geht von denselben Polynomen R_i aus, die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **25**, 241) gebraucht wurden und die jetzt nicht rekursiv, sondern direkt durch

$$R_i = \frac{x_2^{i-1} f(x_1) - x_1^{i-1} f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

definiert werden. Die zweite Methode geht von dem früher gewonnenen Ausdruck von p durch $G = cp + q$ aus. Beide Methoden führen zu einem Ausdruck von q als Quotient von zwei Polynomen, wobei der Nenner den Grad $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ in bezug auf p und in bezug auf x_1, x_2, \dots, x_n hat. Dieser Grad läßt sich nicht herabdrücken. Der Nenner ist gleich $\prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j)$, wobei das Produkt sich über alle Paare x_i, x_j aus den $n-2$ Unbestimmten x_3, \dots, x_n erstreckt. van der Waerden (Leipzig).

Dines, Lloyd L.: On the mapping of quadratic forms. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 494—498 (1941).

$P(z)$ und $Q(z)$ seien reelle quadratische Formen in z^1, z^2, \dots, z^n . Die Transformation $x = P(z)$, $y = Q(z)$ bildet den z -Raum auf eine konvexe Bildmenge \mathfrak{M} in der xy -Ebene ab. Wenn $P(z)$ und $Q(z)$ keine gemeinsame Nullstelle außer $z = 0$ haben, so ist \mathfrak{M} abgeschlossen und ist entweder die ganze xy -Ebene oder ein Winkelraum mit Winkel $< \pi$. Hieraus folgen zwei Korrolare, die Existenz von definiten Formen in der Schar $\lambda P(z) + \mu Q(z)$ betreffend, die aber weniger scharf sind als die Sätze, die Finsler darüber bewiesen hat (dies. Zbl. **16**, 199). van der Waerden (Leipzig).

Mahler, K.: On reduced positive definite ternary quadratic forms. J. London Math. Soc. 15, 193—195 (1940).

Bei der Berechnung von reduzierten positiven ternären quadratischen Formen fand Seeber (Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven, ternären, quadratischen Formen; Freiburg i. Br. 1831), daß in allen berechneten Fällen das Produkt der Koeffizienten der Variabelnquadrate kleiner war als der halbe Absolutwert der in seinem Sinne gebildeten Diskriminante der betreffenden Form. Dieses empirische Resultat wurde von Gauß (Werke Bd. 2, S. 188—196; Göttingen 1876) als allgemeine Eigenschaft der reduzierten Formen erkannt und bewiesen. Später sind andere Beweise veröffentlicht worden, denen der Verf. einen neuen hinzufügt, der sich im Gedankengang mit dem von E. J. Zolotareff (Gesammelte Werke Bd. I, S. 24—25 [Russisch]; Leningrad 1931) berührt.

Brandt (Halle).

Pall, Gordon: The construction of positive ternary quadratic forms. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 641—650 (1941).

Verf. stellt sich die Aufgabe, für die positiven ternären quadratischen Formen eine Reduktionsmethode zu entwickeln, welche es leichter als die bisherigen Methoden ermöglicht, nur die Formen einer bestimmten Ordnung oder eines bestimmten Geschlechtes zu berechnen. Seine reduzierten Formen sind für jede Formenklasse eindeutig bestimmt, und man kann von ihnen aus auf verhältnismäßig einfache Weise die entsprechenden Eisensteinschen reduzierten Formen finden [vgl. J. reine angew. Math. 41, 141—190 (1851)]. Das Verfahren wird an einigen Beispielen auseinandergesetzt.

Brandt (Halle).

Gruppentheorie:

Kořínek, Vladimír: Bemerkung über charakteristisch einfache Gruppen. Sonderdruck aus: Věstn. Královské české Spol. Nauk 1940, 7 S.

Satz 1: Eine Gruppe, die eine direkte Zerlegung der Form

$$\mathfrak{G} = \prod_{0 \leq \sigma < \varphi} \mathfrak{G}_\sigma$$

in charakteristisch einfache Faktoren \mathfrak{G}_σ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{H}_{\alpha\beta} \times \mathfrak{H}_{\alpha\beta}^*, \quad \mathfrak{H}_{\alpha\beta} \cong \mathfrak{H}_{\beta\alpha} \neq 1 \quad (\alpha, \beta \text{ beliebig})$$

besitzt, ist selbst charakteristisch einfach (φ beliebige Ordinalzahl). Satz 2: Umgekehrt hat jede direkte Zerlegung einer charakteristisch einfachen Gruppe die in Satz 1 genannte Eigenschaft. Ref. bemerkt, daß der Beweis von Satz 1 durch die Benutzung der Tatsache, daß kein von 1 verschiedenes Element einer charakteristisch einfachen Gruppe mit mehr als zwei Elementen von allen Automorphismen festgelassen wird, erleichtert würde. Aus Satz 1 ergibt sich, daß das direkte Produkt untereinander isomorpher charakteristisch einfacher Gruppen selbst charakteristisch ist (vgl. Verf., dies. Zbl. 19, 398).

Zassenhaus (Hamburg).

Wedderburn, J. H. M.: Homomorphism of groups. Ann. of Math., II. s. 42, 486—487 (1941).

Sind die Gruppen \mathfrak{G} und \mathfrak{H} in elementenfremde Komplexe $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{H}_i$ zerlegt, die durch $\mathfrak{G}_i \sim \mathfrak{H}_i$ einander eineindeutig derart zugeordnet sind, daß für $G_i \in \mathfrak{G}_i$ aus $G_i G_j = G_k$ die Beziehung $\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{H}_k$ folgt, so spricht Verf. von einer „mehrmehrdeutigen“ Homomorphie. Die übliche „eindeutige“ Homomorphie ist der Sonderfall, in welchem die Komplexe \mathfrak{G}_i Elemente von \mathfrak{G} sind. Einfache Beweise zeigen: die mehrmehrdeutige Homomorphie ist symmetrisch; sie ordnet die Gruppeneinheiten enthaltenden Komplexe \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1 einander zu; \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1 sind Normalteiler mit isomorphen Faktorgruppen; durch \mathfrak{G} und \mathfrak{H} sind die minimalen, eine mehrmehrdeutige Homomorphie erzeugenden Normalteiler \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1 eindeutig bestimmt. G. Hajós.

Hall, P.: On groups of automorphisms. J. reine angew. Math. 182, 194—204 (1940).

Als gruppentheoretische Situation sei eine Folge S von abelschen Gruppen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_r$ gegeben. Als Realisierung R von S werde jede abelsche Gruppe \mathfrak{G}

mit der Untergruppenkette $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supseteq \mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{G}_r = 1$, für die $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{Q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) gilt, bezeichnet. Zwei Realisierungen R, R' heißen isomorph, wenn zwischen \mathfrak{G} und \mathfrak{G}' ein Isomorphismus besteht, der jede Untergruppe \mathfrak{G}_i auf \mathfrak{G}'_i abbildet. Alle Automorphismen von \mathfrak{G} , die jede Gruppe \mathfrak{G}_i festlassen, bilden die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(R)$ von R . Zwischen den $\mathfrak{A}(R)$ und der Gruppe der Automorphismen von S , die gleich dem direkten Produkt der Automorphismengruppen der \mathfrak{Q}_i gesetzt wird, besteht folgender arithmetischer Zusammenhang:

$$\sum_R \frac{1}{\mathfrak{A}(R):1} = \frac{1}{\mathfrak{A}(S):1}.$$

Aus dieser „primären“ Formel entstehen durch geeignete Summationen neue „sekundäre“ Formeln. Verf. stellt ein Programm auf zur Bestimmung jener Situationen, die in analoger arithmetischer Beziehung zu ihren Realisierungen stehen, und entwickelt an weiteren Beispielen seine Ideen.

Zassenhaus (Hamburg).

Frame, J. S.: The double cosets of a finite group. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 458—467 (1941).

Sei G_H die Darstellung einer endlichen Gruppe G als transitive Permutationsgruppe bezüglich der Untergruppe H . Sei ferner G nach H in Nebengruppen zerlegt. Verf. untersucht im Anschluß an frühere Arbeiten (s. dies. Zbl. 16, 156; 23, 13) den Fall, daß H Normalteiler ist; eine Nebengruppe heiße K (double coset), K' sei die Nebengruppe, welche die inversen Elemente enthält; ist $K = K'$, so heißt sie selbstinvers. Es gilt: Die Anzahl der selbstinversen Nebengruppen von G nach dem Normalteiler H ist gleich der Summe der Anzahlen derjenigen irreduziblen Komponenten von G_H , die eine symmetrische Bilinearform invariant lassen, vermindert um die Anzahl derjenigen, die eine alternierende Bilinearform invariant lassen. — Ferner wird gezeigt: H vertausche in der transitiven Permutationsgruppe die n Symbole in r transitive Systeme von k_t Symbolen, $t = 1, \dots, r$. Sei $k = \prod k_t$ und N das Produkt der Grade n_i der verschiedenen irreduziblen Komponenten Γ_i von G_H , jeden in der Potenz seiner Vielfachheit in G_H genommen. Dann ist $n^{r-2}k/N = \bar{P} \cdot P$, wo P eine ganze algebraische Zahl im Körper der Charaktere der Komponenten von G_H ist. J. J. Burckhardt.

Brauer, R., and C. Nesbitt: On the modular characters of groups. Ann. of Math., II. s. 42, 556—590 (1941).

Verff. führen ihre Untersuchungen über modulare Darstellungen in einem Körper der Charakteristik p einer endlichen Gruppe weiter. Nach einer Zusammenfassung der früheren Ergebnisse (siehe dies. Zbl. 18, 295; 22, 303) werden folgende Sätze bewiesen: 1. Sei \mathfrak{G} eine Gruppe der Ordnung $g = p^a g'$, p eine Primzahl und $(p, g') = 1$. Eine gewöhnliche irreduzible Darstellung Z_i vom Grade $z_i \equiv 0 \pmod{p}$ bleibt als modulare Darstellung irreduzibel. Die Charaktere von Z_i verschwinden für alle Elemente, deren Ordnung durch p teilbar ist. 2. Sei t_0 die Anzahl der Klassen \mathfrak{C}_v von konjugierten Elementen so, daß (a) die Anzahl der Elemente in \mathfrak{C}_v prim zu p ist, (b) die Ordnung der Elemente von \mathfrak{C}_v prim zu p ist. Dann gibt es in der modularen Darstellung genau t_0 „Kästchen“ (blocks), welche wenigstens eine gewöhnliche irreduzible Darstellung Z_i vom Grade z_i , der prim zu p ist, enthalten. — Weiter werden die Fragen behandelt: Was hilft die Kenntnis der gewöhnlichen Charaktere, um die modularen Charaktere zu erhalten, und umgekehrt, was hilft diese für jene? Sodann wird die Methode, die Charaktere von \mathfrak{G} aus der Kenntnis derjenigen einer Untergruppe zu bestimmen, auf den modularen Fall übertragen. Endlich werden spezielle Fälle und Beispiele betrachtet: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ (direktes Produkt); \mathfrak{G} mit Normalteiler vom Index p^a ; GLH(2, p^a), SLH(2, p^a), LF(2, p^a). J. J. Burckhardt (Zürich).

Lewis, F. A.: A note on the special linear homogeneous group SLH(2, p^n). Bull. Amer. Math. Soc. 47, 629—632 (1941).

Von H. E. Moore wurde gezeigt, daß die spezielle lineare Gruppe SLH(2, p^n) isomorph ist einer Gruppe, die von zwei Elementen T und S_λ erzeugt wird, wo λ die

p^n Elemente des Körpers durchläuft, und wobei die sechs Relationen (a) – (f) bestehen (s. Dickson, Linear Groups, S. 300, Leipzig 1901). Verf. zeigt, daß von diesen die Bedingungen (a), (b), (d) und (e) genügen, wenn $p > 2$ ist. *J. J. Burckhardt.*

Barrett, W.: A note on the structure of real semi-simple infinitesimal groups. J. London Math. Soc. 15, 196–203 (1940).

Diese Arbeit knüpft an die These des Verf. (dies. Zbl. 22, 209) an. Dort wurde jeder reellen Untergruppe G einer komplexen halbeinfachen Infinitesimalgruppe \mathfrak{G} eine Involution im System der charakteristischen Wurzeln von \mathfrak{G} zugeordnet. Hier wird die Existenz dieser Involution von neuem bewiesen, zugleich aber ihre Eindeutigkeit bis auf lineare Transformationen des Systems der Wurzeln in sich.

van der Waerden (Leipzig).

Suschkewitsch, A.: Über einen Typus der verallgemeinerten Semigruppen. Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 17, 19–27 u. deutsch. Zusammenfassung 27–28 (1940) [Russisch].

Alle Matrizen $(a_{\alpha\beta})$ mit abzählbar unendlich vielen Zeilen und Spalten, deren Zeilenvektoren sich durch Hinzufügung endlich vieler weiterer Vektoren zu einer orthogonal normierten Basis des Hilbertschen Raumes ergänzen lassen, bilden ein System von Elementen mit den folgenden 8 Eigenschaften: I. Die Multiplikation ist eindeutig und unbeschränkt ausführbar. Für sie gilt: II. das Assoziativgesetz und III. die linke Kürzungsregel: Aus $BA = CA$ folgt $B = C$. IV. Es gibt eine zweiseitige Einheit E . V. Wenigstens eine der beiden Gleichungen $AX = B$ oder $BY = A$ ist lösbar. — Wenn nur die erste Gleichung lösbar ist, so heißt A von kleinerem Range als B : $A < B$. Wenn beide Gleichungen lösbar sind, so heißen A und B von gleichem Range: $A \sim B$. Es gelten die bekannten Regeln für die Zeichen $<$, \sim . Ferner folgt aus $A < B$, $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, daß $A_1 < B_1$. — VI. Aus $AB = CD$ und $A \sim C$ folgt $B \sim D$. VII. (Satz von Eudoxus): Wenn $E < B < C$, so ist $C < B^m$ lösbar. VIII. (Minimalkettensatz): Jede Reihe von Elementen mit stets abnehmendem Range bricht nach endlich vielen Schritten ab. — Aus I–VI folgt schon: E hat den kleinsten Rang. Alle mit E ranggleichen Elemente bilden eine Gruppe \mathfrak{G} . Wenn A nicht in \mathfrak{G} liegt, so haben die Potenzen A, A^2, \dots stets zunehmenden Rang. Der Komplex $A = \mathfrak{G} + A\mathfrak{G} + A^2\mathfrak{G} + \dots$ hat die Eigenschaften I–VIII. Alle X mit $AX = A$ bilden eine Untergruppe \mathfrak{G}_A von \mathfrak{G} . Wenn $A \sim B$, so ist $\mathfrak{G}_B = R^{-1}\mathfrak{G}_A R$ ($B = AR$). In der Gleichung $PA = AP_1$ durchläuft P_1 eine Untergruppe \mathfrak{G}_A von \mathfrak{G} , die \mathfrak{G}_A als Normalteiler mit zu \mathfrak{G} isomorpher Faktorgruppe enthält, sofern P die Gruppe \mathfrak{G} durchläuft. — Wenn I–VIII gilt und keine Gruppe vorliegt, so läßt sich das ganze System in der Form $\mathfrak{C} = \mathfrak{G} + A\mathfrak{G} + A^2\mathfrak{G} + \dots$ darstellen, in der A ein Element zweitniedrigsten Ranges ist. — Die umkehrbar eindeutigen Abbildungen aller natürlichen Zahlen auf fast alle natürlichen Zahlen bilden ein weiteres Beispiel für ein System, in dem I–VIII erfüllt ist.

Zassenhaus (Hamburg).

Verbände. Ringe. Körper:

Heyting, A.: Untersuchungen über intuitionistische Algebra. Nederl. Akad. Wetensch., Verh. Sect. 1, 18, Nr 2, 1–36 (1941).

Es werden systematisch Gruppen, Ringe und Körper betrachtet, die nicht diskret sind, d. h. in denen es nicht immer möglich ist, von zwei Elementen zu entscheiden, ob sie gleich sind oder nicht. Eine Gruppe mit Entfernungsrelation ist eine Gruppe, in der eine Relation $a \# b$ definiert ist, deren Negation die Gleichheitsrelation $a = b$ ergibt, derart, daß aus $a \# b$ folgt $a \# c$ oder $b \# c$ und aus $x \# y$ folgt $a + x \# a + y$ und $x + a \# y + a$. Entsprechend werden Ringe, Integritätsbereiche und Körper mit Entfernungsrelation (ER) definiert; in einem solchen Körper wird die Existenz des Inversen a^{-1} nur für $a \# 1$ verlangt. Ein Integritätsbereich mit ER hat einen Quotientenkörper. Im Polynombereich $I[x]$ kann man wieder eine ER definieren. Polynome $\# 0$ haben einen Maximal- und einen Minimalgrad. Nun wird die Theorie der

linearen Gleichungen und der linearen Abhängigkeit von Vektoren über einem Körper entwickelt. Es gibt eine schwache und eine starke lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit. Die Theorie der linearen Gleichungen wird zunächst ohne, dann mit Determinanten entwickelt. Eine Matrix hat den Rang r , wenn eine r -reihige Unterdeterminante $\neq 0$, aber alle $(r+1)$ -reihigen Unterdeterminanten $= 0$ sind. — Teilbarkeit von Polynomen. Ein verschärfter Begriff der Inkongruenz: $f \not\equiv g(h)$, wenn für jedes Polynom k gilt $f - g \not\equiv kh$. Mit Hilfe eines Determinantenkriteriums für Teilbarkeit werden Sätze folgender Art bewiesen: Ist $h \not\equiv 0$ und $f \equiv 0(h)$, so ist für jedes Polynom k entweder $f \equiv 0(k)$ oder $h \not\equiv k$. Der Restklassenring nach einem Polynom $h \not\equiv 0$ ist ein Ring mit ER. — Es gibt eine starke und eine schwache Zerlegbarkeit. Ein Polynom $f \not\equiv 0$ heißt prim, wenn $f \not\equiv gh$, sobald g und h von Konstanten entfernt sind. f und g heißen relativ prim, wenn für jedes von 0 entfernte Polynom, dessen Minimalgrad > 0 ist, wenigstens eine der Relationen $f \equiv 0(h)$, $g \equiv 0(h)$ gilt. Sind f und g relativ prim und ist $h \not\equiv 0$ und der Maximalgrad von k kleiner als der Minimalgrad von g , so ist $hf + kg \not\equiv 0$. Ist f prim und $g \equiv 0(f)$, so sind f und g relativ prim. Ist f prim und Maximalgrad = Minimalgrad > 0 , so ist der Restklassenring nach f ein Körper. Sind $f(x)$ und $g(x)$ relativ prim und ist y eine weitere Unbestimmte, so ist $f + gy$ prim über $K(y)$. Für die Eliminationstheorie wäre es wichtig, diesen Satz auf den Fall $f + f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots$ zu erweitern. — Die Eliminationstheorie wird für Polynome in einer Veränderlichen nach der Sylvesterschen dialytischen Methode durchgeführt. Hat die dialytische Matrix für den Grad $n-1$ den Rang r , so haben die Polynome f_1, f_2, \dots einen eindeutig bestimmten g. g. T. vom Grade $n-r$. Die Umkehrung wird zunächst für 2 Polynome bewiesen und dann für algebraisch abgeschlossenen Grundkörper auf beliebig viele f_k übertragen. Es folgen noch einige Bemerkungen über Elimination bei mehreren Veränderlichen und über die Primfaktorzerlegung der Polynome.

van der Waerden (Leipzig).

Neumann, B. H.: On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. 15, 203—208 (1940).

H. Zassenhaus [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 187—220 (1935); dies. Zbl. 11, 103] bewies, daß in einem endlichen Fastkörper das kommutative Gesetz der Addition eine Folge der übrigen Axiome ist. Es wird hier eine Verallgemeinerung bewiesen: S sei eine Gruppe, deren Verknüpfung als Addition bezeichnet werde. Für jedes $a \in S$ gebe es genau eine Lösung der Gleichung $x + x = a$. S gestatte einen Automorphismus der Ordnung 2, der kein Element $\neq 0$ ungeändert läßt. Dann ist S eine Abelsche Gruppe. Spezialfall von S ist der Fastkörper, eine additive Gruppe S , in der eine assoziative und von rechts distributive Multiplikation mit Einheitselement e existiert, in der aus $a \neq 0$ und $ab = ac$ stets $b = c$ folgt, in der ferner ein h mit $h + h = e$ existiert. Die Multiplikation mit $-e$ ergibt den obenerwähnten Automorphismus.

G. Köthe (Gießen).

Petiau, Gérard: Sur un système de nombres hypercomplexes dérivés des nombres de Clifford. Mathematica, Cluj 18, 77—96 (1942).

L'A. considère, dans le produit kroneckérien d'un système de nombres de Clifford S par un système isomorphe \bar{S} (tous deux de rang 2^n sur le corps des réels) certaines combinaisons des éléments de base de cette algèbre, qu'il désigne par les lettres A_i, B_i, C_i ; tout le travail est consacré à étudier la table de multiplication de ces éléments, et à en déduire toute une série d'identités, dont on voit mal l'intérêt. Aucune question de structure n'est posée ni résolue; il est facile d'ailleurs de suppléer à cette lacune. Les C_i forment la base d'une algèbre de rang 2^n , somme directe de 2^n corps isomorphes au corps des réels: une base mettant ce fait en évidence est constituée par les 2^n produits $\prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i C_i)$, où ε_i prend les valeurs ± 1 . Les A_i forment la base de l'algèbre I engendrée par les produits $x\bar{x}$, où x parcourt S , et $x \rightarrow \bar{x}$ est un iso-

morphisme de S sur \bar{S} ; cette algèbre est aussi formée des éléments invariants par l'automorphisme de $S \times \bar{S}$ qui, à $x\bar{y}$ ($x \in S, \bar{y} \in \bar{S}$) fait correspondre $y\bar{x}$. Si on se borne par exemple au cas où n est pair, $S \times \bar{S}$ est une algèbre de matrices d'ordre 2^n sur le corps des réels, et I est l'ensemble des matrices X telles que $PXP^{-1} = X$, où P est une matrice telle que $P = P^{-1}$; en ramenant P à sa forme canonique, on en conclut que I est semi-simple, somme directe de deux algèbres de matrices d'ordres respectifs $2^{n-1} + 2^{(n-2)/2}$ et $2^{n-1} - 2^{(n-2)/2}$.

J. Dieudonné (Nancy).

Perlis, Sam: Scalar extensions of algebras with exponent equal to index. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 670—676 (1941).

Der Exponent einer normalen einfachen Algebra A über einem Körper F ist die kleinste Zahl q , so daß A^q voll zerfällt. Der Index ist der kleinste Grad eines Zerfällungskörpers. Bei manchen Algebren ist Index = Exponent. Ob diese Eigenschaft bei separablen Erweiterungen erhalten bleibt, hängt davon ab, ob sie bei zyklischen Erweiterungen vom Grade p erhalten bleibt, wo p alle Teiler des Index durchläuft. Bei rein inseparablen Erweiterungen hängt die Erhaltung in erster Linie vom Unvollkommenheitsgrad von F ab: ist dieser 1, so ist nach Teichmüller für alle p -Algebren stets Exponent = Index; ist er aber größer als 1, so braucht diese Eigenschaft nicht zu gelten, und wenn sie gilt, kann sie bei rein inseparabler Erweiterung von F wieder verlorengehen, wie durch ein Beispiel gezeigt wird. *van der Waerden (Leipzig).*

Etherington, I. M. H.: Commutative train algebras of ranks 2 and 3. J. London Math. Soc. 15, 136—149 (1940).

Eine (nicht notwendig assoziative) Algebra X über dem Grundkörper F heißt barisch, wenn man jedem Element x ein Gewicht $\xi(x)$ aus F zuordnen kann, so daß

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y), \quad \xi(\alpha x) = \alpha \xi(x), \quad \xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$$

gilt. Es gibt dann ein zweiseitiges Ideal U in X derart, daß der Restklassenring $X - U$ isomorph F ist. Die Elemente von U haben das Gewicht Null und heißen Nilelemente. Das Nilprodukt $x \cdot y$ wird als das Nilelement

$$x \cdot y = xy - \frac{1}{2}\xi(x)y - \frac{1}{2}\xi(y)x$$

definiert. Von nun an sei die Algebra X kommutativ; in der Erbmathematik ist diese Voraussetzung immer erfüllt. Die Nilquadrate $x'' = x \cdot x$ und ihre Linearkombinationen p bilden ein Ideal P in X , zu dem auch alle Nilprodukte gehören. Der Restklassenring $X - P$ ist eine Train-Algebra, d. h. die Koeffizienten der Ranggleichung eines allgemeinen Elementes x von $X - P$ hängen nur von $\xi(x)$ ab. In diesem Fall heißt die Ranggleichung nämlich, wenn das Gewicht $\xi(x)$ zu 1 normiert wird, $x(x - 1) = 0$. Es gibt in einer barischen Algebra zwei Arten von nilpotenten Elementen, nämlich solche vom Gewicht 1 und vom Gewicht 0. In einer Train-Algebra kann nur der erste Fall vorkommen. — Ist λ ein festes Element von F , so wird das dreifache Nilprodukt $x \cdot y \cdot z$ durch

$$\frac{1}{2}x \cdot y \cdot z = \frac{1}{2}[x \cdot yz + y \cdot zx + z \cdot xy - (1 + \lambda)(\xi yz + \eta zx + \zeta xy) + \lambda(x\eta\xi + y\xi\xi + z\xi\eta)]$$

definiert. Die Nilkuben $x''' = x \cdot x \cdot x = x(x - 1)(x - \lambda)$ der Elemente vom Gewichte Eins und ihre Linearkombinationen q bilden eine Untermenge Q_λ von P , zu der auch alle dreifachen Nilprodukte gehören. Wenn Q_λ ein Ideal ist, so ist $X - Q_\lambda$ eine Train-Algebra mit Ranggleichung $x(x - 1)(x - \lambda) = 0$, also λ eine Wurzel der Ranggleichung der ursprünglichen Algebra X . — Die Multiplikationstafel einer kommutativen Train-Algebra vom Range 2 kann stets auf die Form

$$I^\mu I^\nu = \frac{1}{2}I^\mu + \frac{1}{2}I^\nu$$

gebracht werden; die Multiplikation ist assoziativ für Potenzen, und die Ranggleichung heißt $x(x - 1) = 0$. Für kommutative Train-Algebren vom Rang 3 heißt die Ranggleichung $x(x - 1)(x - \lambda) = 0$. Für diesen Wert von λ ist $Q_\lambda = 0$, d. h. alle dreifachen Nilprodukte sind Null. Die plenary Ranggleichung, d. h. die Minimalgleichung

für iterierte Quadrate heißt

$$x^{2^2} - (1 + 2\lambda)x^2 + 2\lambda x = 0.$$

Ein Element x und sein Quadrat erzeugen eine Teilalgebra von ganz bestimmter Struktur. Im Fall $\lambda \neq \frac{1}{2}$ kann die Multiplikationstafel der Algebra X auf eine geeignete Normalform gebracht werden. *van der Waerden* (Leipzig).

Groot, J. de: Bemerkung über die analytische Fortsetzung in bewerteten Körpern. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 347—349 (1942).

In einem archimedisch bewerteten Körper, wie z. B. dem der komplexen Zahlen, kann eine Potenzreihe unter Umständen über ihren Konvergenzkreis hinaus analytisch fortgesetzt werden. In einem nicht archimedisch bewerteten Körper gibt es das nicht, sondern wenn man eine vorgegebene Potenzreihe $f(x)$ in einem Punkt x_0 ihres Konvergenzgebietes nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt, so konvergiert die neue Potenzreihe in genau demselben Gebiete wie die alte. Für diese von Schöbe und Loonstra (dies. Zbl. 25, 247) bewiesene Tatsache wird ein neuer Beweis gegeben.

van der Waerden (Leipzig).

Zahlentheorie:

Sarantopoulos, Spyridion: Quelques théorèmes sur les nombres entiers. Bull. Soc. Math. Grèce 21, 1—33 (1941).

Verf. setzt eine frühere Arbeit [Bull. Soc. Math. Grèce 20, 85—100 (1940); dies. Zbl. 24, 13] fort. Die Sätze bewegen sich in derselben Richtung und entziehen sich durch ihre Kompliziertheit der Wiedergabe. Erwähnenswert ist das Theorem XXIII: Sei $M > 1$, seien b_0, b_1, \dots, b_μ zu M , u_0, u_1, \dots, u_μ zu $\varphi(M)$ prim. Dann kann jede ganze Zahl A als

$$A = \sum_{j=0}^{\mu} \pm b_j \lambda_j \varepsilon_j^{u_j} M^{v_j} \pm \beta M^{\nu_0+1} \quad (v_0 \geq 0, v_j < v_{j+1})$$

dargestellt werden, wo die λ_j null oder eigentliche Teiler von M sind, für $\lambda_j \neq 0$ die Zahl ε_j die Beziehungen $0 < \varepsilon_j < M/\lambda_j$, $(\varepsilon_j, M/\lambda_j) = 1$ erfüllt, weiter, wenn ein λ_j verschwindet, auch alle folgenden und β null sind. Diese Darstellung ist eindeutig.

Holzer (Graz).

● **Wright, Harry N.:** First course in the theory of numbers. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall Ltd. 1939. VII, 108 pag. 12/-.

Bauer, M.: Zur Theorie der identischen Kongruenzen. J. London Math. Soc. 15, 82—84 (1940).

Ein Satz von H. Gupta (dies. Zbl. 21, 390) über das Kongruenzverhalten der n -ten Potenzsumme der zu m primen natürlichen Zahlen $< m$ wird aus Verf.s früheren Resultaten über identische Kongruenzen in etwas weniger scharfer Form einfach hergeleitet.

Rédei (Szeged).

Chung, Kai-Lai: Note on a theorem on quadratic residues. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 514—516 (1941).

Es wird ein neuer analytischer Beweis für den Satz gegeben, daß es, wenn p Primzahl, $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist, zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ mehr quadratische Reste mod p gibt als zwischen $\frac{p}{2}$ und p . Die Anzahl der quadratischen Reste zwischen $\frac{p}{2}$ und p hat den

$$\frac{p-1}{2}$$

Wert $\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left[\frac{2s^2}{p} \right] - 2 \left[\frac{s^2}{p} \right] \right)$; zu beweisen ist also, daß diese Summe $\leq \frac{p-1}{4}$ ist. Das

allgemeine Summenglied wird mittels der Fourierentwicklung der Funktion $x - [x] - \frac{1}{2}$ umgeformt. Nach Vertauschung der Summationen treten zwei Gaußsche Summen

auf. Dadurch kommt die Behauptung darauf hinaus, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(2 \left(\frac{n}{p} \right) - \left(\frac{2n}{p} \right) \right) \geq 0$,

d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{p} \right) \geq 0$ ist, und das ergibt sich bekanntlich mit einfachen analytischen Hilfsmitteln.

Weber (Berlin-Wilmersdorf).

Skolem, Th.: Unlösbarkeit von Gleichungen, deren entsprechende Kongruenz für jeden Modul lösbar ist. Avh. Norske Vid. Akad, Oslo 1942, 1—28 (Nr 4).

Bekanntlich sind lineare Gleichungen und homogene quadratische Gleichungen ganzzahlig lösbar, wenn die entsprechenden Kongruenzen nach jedem Modul lösbar sind. Für inhomogene quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades ist das Verhalten anders. In dieser Arbeit gibt Verf. einige interessante Beispiele kubischer Gleichungen in zwei Unbestimmten, für welche die entsprechenden Kongruenzen nach jedem Modul lösbar sind, die aber ganzzahlig unlösbar sind, und zeigt ferner, wie man umfassende Klassen von unendlich vielen Gleichungen dieser Art finden kann. Als solche Beispiele werden die Gleichungen $x^3 + 3y^3 = 22$ und $x^3 + 4z^3 = 55$ angeführt. Danach betrachtet Verf. allgemein Gleichungssysteme $N(x + y\vartheta + z\vartheta^2) = 1$, $ax + by + cz = 0$ in drei Unbestimmten x, y, z , wo $\vartheta^3 = d$ und d kubenfrei ist. Diese Systeme sind mit Gleichungen $N(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = 1$ in zwei Unbestimmten gleichbedeutend. Verf. zeigt, daß man zu jedem d , wo $d \equiv 0, \pm 2$ oder ± 3 ist, unendlich viele Tripel a, b, c angeben kann, für welche die Kongruenz $N(\alpha_1 u + \alpha_2 v) \equiv 1 \pmod{m}$ nach jedem Modul m lösbar ist, während sogar die Kongruenz $ax + by + cz \equiv 0$ nach passendem Modul p unlösbar ist, und also auch die Gleichung $N(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = 1$ unlösbar ist.

Bergström (Uppsala).

Ljunggren, Wilhelm: Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante. Acta math. 75, 1—21 (1942).

Es werden Beiträge zum Problem der Darstellung der Zahl 1 durch eine binäre kubische Form mit ganzrationalen Koeffizienten und positiver Diskriminante gegeben. Das Problem wird vollständig für die Form $x^3 - 3xy^2 - y^3$ gelöst und im allgemeinen Fall in Verbindung gebracht mit dem Einheitenproblem eines durch die Form bestimmten Ringes 6-ter Ordnung.

Brandt (Halle).

Scherk, Peter: Two estimates connected with the (α, β) -hypothesis. Ann. of Math., II. s. 42, 538—546 (1941).

Sind \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ Mengen natürlicher Zahlen mit den Anzahlfunktionen $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ und den Dichten α , β , γ , so lautet die (α, β) -Vermutung: Ist $\alpha + \beta < 1$, so ist $\gamma \geq \alpha + \beta$ (vgl. hierzu Khintchine, dies. Zbl. 6, 155). Zum Beweis dieser Vermutung wird man $C(x)$ durch $A(x)$ und $B(x)$ abzuschätzen suchen. Als erster gab Besicovitch (dies. Zbl. 12, 394) eine Abschätzung $C(x) \geq A(x) + \sum B(x_v)$, wo die Summe für bestimmte Zahlen $x_v < x$ zu bilden ist. Im Anschluß hieran hat Verf. zwei weitere Abschätzungen dieser Art abgeleitet (dies. Zbl. 21, 206—207). In jedem dieser drei Fälle wächst jedoch die Anzahl der Summanden mit x . Daher gibt Verf. jetzt zwei neue Abschätzungen mit beschränkter Summandenzahl. — Die Arbeit ist im April 1941 erschienen. Inzwischen ist die geschilderte Fragestellung mit wesentlich verfeinerten und weitertragenden Methoden von Ostmann (dies. Zbl. 23, 295) angegriffen worden.

Rohrbach (Prag).

Mahler, Kurt: On a special functional equation. J. London Math. Soc. 15, 115—123 (1940).

Es sei $\omega \neq 0$ reell, $0 < q < 1$. Verf. betrachtet die Funktionalgleichung

$$(1) \quad (f(z + \omega) - f(z)) \cdot \omega^{-1} = f(qz)$$

für positive z ; mit Hilfe des Ansatzes $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(zq^{x_i}) dx$ wird zunächst eine spezielle analytische Lösung $\Phi(z)$ von (1) gefunden, und für diese wird folgende Abschätzung bewiesen: wird die natürliche Zahl n durch (2) $nq^{-(n-1)} \leq z < (n+1)q^{-n}$

definiert, so ist $\Phi(z) \sim A(z, q) \vartheta(q^{n-\frac{1}{2}} z n^{-1})$ für $z \rightarrow +\infty$, wo

$$A(z, q) = \frac{1}{n!} q^{\frac{1}{2} n(n-1)} z^n; \quad \vartheta(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2} h^2} t^h.$$

Daraus folgt dann: Ist $f(z)$ für hinreichend große z irgendeine Lösung von (1), die in jedem beschränkten Intervall beschränkt ist, so ist $f(z) = O(A(z, q))$ für $z \rightarrow +\infty$; hat dazu noch $f(z)$ in einem Intervall $(a, +\infty)$ eine positive untere Schranke, so ist sogar $f(z) = A(z, q) \cdot e^{O(1)}$. — Anwendung: Es sei $r > 1$ ganz; $C(h)$ sei die Anzahl der Darstellungen $h = h_0 + h_1 r + h_2 r^2 + h_3 r^3 + \dots$ mit ganzen $h_j \geq 0$. Für ganze $h > 0$ ist $C(h) = C\left(r \cdot \left[\frac{h}{r}\right]\right)$, $C(hr) = C((h-1)r) + C\left(r \cdot \left[\frac{h}{r}\right]\right)$. Setzt man $f(z) = C([z]r)$, so gilt (1) mit $\omega = -1$, $q = r^{-1}$, woraus sich eine asymptotische Formel für $C(h)$ ergibt. In erster Näherung: $\log C(h) \sim \frac{1}{2}(\log h)^2 (\log r)^{-1}$ für $h \rightarrow +\infty$. — Auf S. 120, Z. 10 lies $k > n^{1/3}$; die Exponenten von n sind zu verbessern. Um auf Z. 17 $F(qz) = o(F(z))$ aus (11) abzuleiten, beachte man: ersetzt man z durch qz , so verkleinert sich das zugehörige n [vgl. unsere Formel (2)] höchstens um 1. *Jarník*.

Selmer, Ernst S.: Über die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl Primzahl ist. Norsk mat. Tidsskr. 24, 107—112 (1942) [Norwegisch].

Die Funktion $\text{Li}(x) = \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dz}{\log z} \right)$ ($\varepsilon > 0$) stimmt bekanntlich asymptotisch mit $\pi(x)$ und daher auch mit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(\sqrt[n]{x}\right)$ überein. Unter Hinweis auf

die bis 10^7 erstreckten bisherigen Primzahltafeln stellt Verf. nun fest, daß $\text{Li}(x)$ den Ausdruck $f(x)$ wesentlich besser annähert als den Ausdruck $\pi(x)$, schreibt daher

$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f\left(\sqrt[n]{x}\right)$ in die Form $\pi(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}\left(\sqrt[n]{x}\right)$ um und macht es damit

plausibel, daß die Wahrscheinlichkeit s_x für die Primzahleigenschaft einer natürlichen Zahl $\leq x$ über die bekannte asymptotische Darstellung $s_x \sim \frac{1}{\log x}$ hinaus eine bessere

Annäherung $s_x \approx \frac{1}{\log x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n x^{1-\frac{1}{n}}}$ zuläßt. Die Abweichungen der mittleren Primzahl-

häufigkeit von dem Wert $\frac{1}{\log x}$ in 225 aufeinanderfolgenden Intervallen zwischen 10^4 und 10^7 mit allmählich wachsender Breite werden durch eine graphische Darstellung in einem hyperbolisch-logarithmischen Netz veranschaulicht. *W. Weber*.

Tricomi, Francesco: Su di una formula relativa alla frequenza dei numeri primi. Atti Accad. Sci. Torino 77, 120—129 (1942).

Verf. leitet durch Wahrscheinlichkeitsüberlegungen heuristisch für

$$f_n = \frac{\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2)}{p_{n+1}^2 - p_n^2}$$

(p_n n -te Primzahl, $\pi(x) = \sum_{p_n \leq x} 1$) die Näherungsformel $f_n \sim \frac{1}{2} e^C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ (C Eulersche Konstante) her. Diese Methode hat Verf. schon früher angewendet (s. dies. Zbl. 22,

114). Es wird dann streng die asymptotische Formel $f_n = \frac{1}{2} e^C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) + O\left(\frac{1}{\log^2 p_n}\right)$ bewiesen.

Edmund Hlawka (Wien).

Mahler, Kurt: On the product of two complex linear polynomials in two variables. J. London Math. Soc. 15, 213—236 (1940).

I. Die Untersuchung basiert auf drei elementargeometrischen Sätzen. Der erste

lautet so: Man betrachte in der komplexen Ebene die Menge J aller Punkte $a + ib$ (a, b ganz rational). Es sei Q ein Quadrat mit der Seite α in beliebiger Lage. M sei die aus seinen vier Eckpunkten bestehende Menge. $\delta(Q)$ sei das Minimum von $|x - y|$, wo x in J , y in M liegt. δ_α sei das Maximum von $\delta(Q)$ für alle Lagen von Q (bei gegebenem α). Satz: für $\alpha^2 \leq \frac{1}{2}$ ist (1) $\delta_\alpha^2 = \frac{1}{2} - 2^{-\frac{1}{2}}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2$. Analoger Satz für Rechtecke mit Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$ (Punkte $a + \sqrt{2}ib$) und für gleichseitige Dreiecke (Punkte $a + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)b$). Eine vollständig lückenlose Darstellung der Beweise dürfte wohl noch einige elementare Zusatzbetrachtungen erfordern. — II. Es sei nun $D = 1$ oder 2 oder 3; J bedeute die Menge aller ganzen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-D})$. Zwei komplexe Zahlen x, y heißen kongruent (Zeichen \equiv), wenn $x - y$ in J liegt. Hauptsatz: Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x_0, y_0$ komplexe Zahlen, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Dann gibt es zwei komplexe Zahlen x_1, y_1 mit

$$(2) \quad x_1 \equiv x_0, \quad y_1 \equiv y_0, \quad |\alpha x_1 + \beta y_1| \cdot |\gamma x_1 + \delta y_1| \leq \frac{1}{2} \text{ bzw. } \frac{3}{4} \text{ bzw. } \frac{1}{2} \\ (\text{für } D = 1 \text{ bzw. } 2 \text{ bzw. } 3).$$

Ist $\beta \neq 0$ und liegt $\alpha\beta^{-1}$ nicht in $K(\sqrt{-D})$, so kann man gleichzeitig $|\alpha x_1 + \beta y_1|$ beliebig klein machen. Das Gleichheitszeichen in (2) ist genau dann unentbehrlich, wenn identisch in x, y gilt $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = (ax + by)(cx + dy)$, wo $ad - bc = 1$ und a, b, c, d in J liegen und wenn gleichzeitig

$$ax_0 + by_0 \equiv \mp(cx_0 + dy_0) \equiv \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-D}) \quad \text{für } D = 1, 2 \\ (\text{bzw. } \equiv \mp(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}) \quad \text{für } D = 3).$$

III. Beweisskizze für $D = 1$. Will man nur (2) beweisen, so genügt es, die Existenz eines $t > 0$ und zweier Zahlen x, y mit

$$(3) \quad x \equiv x_0, \quad y \equiv y_0, \quad f_t(x, y) = t|\alpha x + \beta y|^2 + t^{-1}|\gamma x + \delta y|^2 \leq 1$$

zu beweisen (Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel). Es läßt sich zeigen, daß es ein $t > 0$ und eine Substitution $x' = ax + by, y' = cx + dy, ad - bc = 1$ (a, b, c, d in J) gibt, welche $f_t(x, y)$ (das ist eine positiv definite Hermitesche Form mit der Determinante 1) in eine Form

$$(4) \quad F(x', y') = Ax'\bar{x}' + B\bar{x}'y' + \bar{B}x'y' + Ay'\bar{y}' = A|x' + B \cdot A^{-1}y'|^2 + A^{-1}|y'|^2$$

mit $A > 0, A^2 = |B|^2 + 1, |\Re(B \cdot A^{-1})| \leq \frac{1}{2}, |\Im(B \cdot A^{-1})| \leq \frac{1}{2}$ (also $1 \leq A^2 \leq 2$) überführt; es sei $x'_0 = ax_0 + by_0, y'_0 = cx_0 + dy_0$. Wir suchen $x' \equiv x'_0, y' \equiv y'_0$, so daß $F(x', y') \leq 1$. Durch Übergang zu kongruenten Zahlen kann man erreichen, daß

$$(5) \quad |\Re(y'_0)| \leq \frac{1}{2}, \quad |\Im(y'_0)| \leq \frac{1}{2}, \quad |\Re(x'_0 + B \cdot A^{-1}y'_0)| \leq \frac{1}{2}, \quad |\Im(x'_0 + B \cdot A^{-1}y'_0)| \leq \frac{1}{2}.$$

Ist $|y'_0|^2 < \mu^2 = \frac{1}{2}(2A - A^2)$, so gibt (4), (5) schon $F(x'_0, y'_0) < 1$. Gilt aber $|y'_0| \geq \mu$, so setze man $\varepsilon_1 = \text{sgn} \Re(y'_0), \varepsilon_2 = \text{sgn} \Im(y'_0)$ und man betrachte die vier Punkte $y'_0 - \varepsilon_1\eta_1 - \varepsilon_2\eta_2i$ ($\eta_j = 0$ oder 1); man bezeichne sie mit y'_j ($0 \leq j \leq 3$); man zeigt leicht

$$(6) \quad |y'_j|^2 \leq \lambda = \frac{1}{2}(1 - (A - 1)^2) + 1 + (1 - 2(A - 1)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Punkte $(7) \quad z'_j = x'_0 + B \cdot A^{-1}y'_j$ bilden die vier Ecken eines Quadrats mit der Seite $\alpha = |B \cdot A^{-1}| = (1 - A^{-2})^{\frac{1}{2}}$. Nach I. gibt es also einen Index j und einen Punkt v aus J mit $(8) \quad |z'_j - v| \leq \delta_\alpha$. Dann ist nach (8), (7), (6), (4)

$$F(x'_0 - v, y'_j) \leq A\delta_\alpha^2 + A^{-1}\lambda;$$

mit Hilfe von (6), (1) zeigt man $F(x'_0 - v, y'_j) \leq 1$. — IV. Der Hauptsatz enthält natürlich auch die entsprechende Aussage über das „inhomogene“ Produkt $(\alpha X + \beta Y + \xi)(\gamma X + \delta Y + \eta)$ für X, Y aus J : man berechne x_0, y_0 aus $\alpha x_0 + \beta y_0 = \xi, \gamma x_0 + \delta y_0 = \eta$ und man untersuche das Produkt $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ für $x \equiv x_0, y \equiv y_0$. — Für $D = 1$ wurde der genannte Hauptsatz auf anderem Wege von E. Hlawka bewiesen (dies. Zbl. 18, 204).

Jarník (Prag).

Mahler, Kurt: An analogue to Minkowski's geometry of numbers in a field of series. Ann. of Math., II. s. **42**, 488—522 (1941).

Verf. behandelt in dieser bedeutenden Arbeit die konvexen Körper in nicht-archimedischen Räumen. Es sei \mathfrak{R} ein beliebiger Körper, dessen Elemente x eine nicht-archimedische Bewertung $|x|$ besitzen und \mathfrak{R} die perfekte Erweiterung von \mathfrak{R} in bezug auf diese Bewertung. Dann legen wir allem folgenden den Raum P_n aller Punkte $X = (x_1, \dots, x_n)$, wo die x_i in \mathfrak{R} liegen, zugrunde und nennen $\max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ die Länge $|X|$ des Vektors X . Eine Funktion $F(X)$ heißt Distanzfunktion, wenn stets $F(0) = 0$, $F(X) \geq 0$, $F(aX) = |a| F(X)$, $F(X \mp Y) \leq \max(F(X), F(Y))$. Die Punktmenge $C(\tau)$: $F(X) \leq \tau$ heißt dann konvex. Es gilt nun die wichtige Tatsache, daß es eine positive Zahl γ gibt, so daß für alle X $F(X) \geq \gamma |X|$ ist. Daraus folgt: Ist die Bewertung diskret, so ist jeder konvexe Körper ein Parallelepiped, d. h. $C(\tau)$

besitzt eine Eichfunktion von der Form $\max\left(\left|\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k\right|\right) \leq \tau^2$. Ist die Bewertung

überall dicht auf der positiven Achse, so läßt sich $C(\tau)$ von außen und innen durch Parallelepipede beliebig genau approximieren. Besitzt die Punktmenge $F(X) = 0$ eine Dimension $n - m$ mit $m < n$, so ist $C(\tau)$ ein Zylinder, dessen Basis ein konvexer Körper von m Dimensionen ist. Die Menge $C'\left(\frac{1}{\tau}\right)$: $G(X) \leq \tau$, mit der Distanzfunktion

$G(Y) = \overline{\lim}(|XY|)$ für alle X mit $F(X) \leq 1$, wenn $Y \neq 0$, heißt polar zu $C(\tau)$ und ist ein konvexer Körper, wenn $m = n$. — Bis jetzt war \mathfrak{R} beliebig. Wir betrachten nun den Körper \mathfrak{R} aller rationalen Funktionen der Unbestimmten z über dem Körper \mathfrak{k} .

Die Bewertung $|x|$ der Elemente x von \mathfrak{R} werde definiert durch: $|x| = 0$, wenn $x = 0$, $|x| = e^f$, wenn $x \neq 0$ von der Ordnung f ist. Die perfekte Erweiterung \mathfrak{R} ist dann der Körper aller Potenzreihen $x = \alpha_f z^f + \dots$ mit α_f in \mathfrak{k} ; ist $\alpha_f \neq 0$, so ist $|x| = e^f$. Die Menge A_n aller Punkte im P_n , deren Koordinaten Polynome in z sind, nennen wir die Menge der Gitterpunkte. Weiterhin dürfen $F(X)$ und τ nur Werte der Gestalt e^t (t natürliche Zahl) annehmen, und es sei stets $m = n$. Ist $M(t)$ die Dimension der Menge aller Gitterpunkte in $C(e^t)$, dann nennen wir $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{M(t) - n(t+1)}$ das Volumen V von $C(1)$. (Ist

$F(X) = |X|$, so ist $V = 1$ im Gegensatz zur klassischen Theorie: $V = 2^n$.) V ist invariant gegenüber allen Transformationen von P_n mit der Determinante 1. Jetzt definieren wir die sukzessiven Minima von $C(\tau)$ wie in der klassischen Theorie: $\sigma^i = F(X^i) = \text{Min } F(X)$ für alle Gitterpunkte, welche \mathfrak{R} -unabhängig sind von X^1, \dots ,

X^{i-1} ($i = 1, \dots, n$). Dann lautet der Hauptsatz $\prod_{i=1}^n \sigma^i = \frac{1}{V}$, $D = \text{Det } x_{ik} = 1$, wenn $X^i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ ist. (Klassisch: $1 \leq D \leq n!$, $\frac{2^n}{n!} \leq V \prod \sigma^i \leq 2^n$.) Daraus folgt der

Fundamentalsatz von Minkowski: Es gibt stets einen Gitterpunkt $X \neq 0$, so daß

$F(X) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{V}} \left(\text{kl. } \frac{2}{n} \right)$ ist. Sind τ^i die Minima des polaren Körpers von $C(\tau)$, so ist

stets $\sigma^i \tau^{n-i+1} = 1$ [kl.: $1 \leq \sigma^i \tau^{n-i+1} \leq (n!)^2$, wie vom Verf. gezeigt wurde (Čas. mat. fys. **68**, 85—92 (1939); dies. Zbl. **21**, 104)]. Daraus folgt sofort der Kroneckersche Satz.

Überraschenderweise läßt sich sogar der inhomogene Linearformensatz mit der scharfen Schranke e^{-n} beweisen (kl. wird vermutet 2^{-n} ; nur bewiesen für 2 und 3). Zum Schluß betrachtet der Verf. noch die endlichen Bewertungen von \mathfrak{R} und stellt für sie ebenfalls den Hauptsatz auf. — Man sieht aus diesem Überblick, daß die Theorie im nicht-archimedischen Fall einfacher ist als im klassischen Fall. — Die Beweise sind klar und ausführlich dargestellt.

Edmund Hlawka (Wien).

Koksma, J. F.: Einige Integrale in der Theorie der gleichmäßigen Verteilung mod. 1. Mathematica, Zutphen B **11**, 49—52 (1942) [Holländisch].

Verf. beweist folgende Formel (bezüglich der Bezeichnungen sei auf das Referat der in dies. Zbl. **26**, 388 besprochenen Arbeit des Verf. verwiesen):

$$\int_0^1 R_{0,t}^2 dt = \frac{1}{3} N^2 + N \sum_{x=1}^N f^2(x) + \sum_{x=1}^N f(x) - 2 \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^x \text{Max}(f(x), f(y)).$$

Für $\int_0^1 R_{0,t}^2 dw(t)$ ($w(t)$ auf $[0, 1]$ von beschränkter Variation) wird eine analoge Formel angegeben. Ich hebe noch folgendes bemerkenswerte Integral hervor:

$$\iint_{\Delta} R_{\alpha, \beta} d\alpha d\beta = -2 \sum_{x=1}^N \left(\frac{1}{2} (f(x))^2 - \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4} \right).$$

Dabei ist Δ das Dreieck $0 \leq \alpha \leq 1; 0 \leq \beta \leq 1, \alpha \leq \beta$. E. Hlawka (Wien).

Koksma, J. F., et B. Meulenbeld: Sur le théorème de Minkowski, concernant un système de formes linéaires réelles. 2. Lemmes et démonstration du théorème 1. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 354—359 (1942).

Die Verff. führen in den folgenden 3 Abhandlungen den Beweis des Satzes, der im Teil 1 (dies. Zbl. 26, 301) ausgesprochen wurde. Sie zeigen zuerst, daß es genügt, den Satz zu beweisen, wenn die $n+1$ Linearformen die Gestalt

$$(1) \quad L_\nu = b_{\nu 1} x_1 + b_{\nu 2} x_2 + \dots + b_{\nu \nu} x_\nu \quad b_{\nu \nu} > 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n+1$$

haben (Lemma 1). Dies wird dadurch erreicht, daß man zuerst Formen mit rationalen Koeffizienten betrachtet und sie, nach Minkowski, durch eine Substitution mit ganzen Koeffizienten und Determinante ± 1 auf die Gestalt (1) bringt. Beliebige Formen werden dann durch solche mit rationalen Koeffizienten angenähert. Pisot.

Koksma, J. F., et B. Meulenbeld: Sur le théorème de Minkowski, concernant un système de formes linéaires réelles. 3. Démonstration des lemmes 5 et 6. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 471—478 (1942).

Der Beweis von Lemma 1 stützt sich auf die Blichfeldtsche Methode [Trans. Amer. Math. Soc. 15, 227—235 (1914)]. Die Punktmenge S , auf die man die Parallelverschiebung ausübt, wird durch Ungleichungen ziemlich komplizierter Gestalt definiert, in welchen der Parameter t und die mit $\varrho_{n,r}^*$ bezeichneten Größen auftreten. Das Berechnen des Volumens von S bildet den Hauptgegenstand dieses Teiles. Die Rechnungen erfordern ziemlich großen Umfang, sind aber einfacher Natur. Pisot.

Koksma, J. F., et B. Meulenbeld: Sur le théorème de Minkowski, concernant un système de formes linéaires réelles. 4. Démonstration du lemme 1. Remarque sur le théorème 1. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 578—584 (1942).

In diesem Teil wird der Blichfeldtsche Satz angewandt. Es sind dann vier Fälle einzeln zu behandeln, was zu längeren Rechnungen führt; der Satz, daß das geometrische Mittel von mehreren positiven Zahlen das arithmetische Mittel nicht übertreffen kann, wird dabei mehrmals gebraucht. Am Schluß wird für die Zahlen $\varrho_{n,r}$ ein einfacherer Ausdruck als in Teil 1 (dies. Zbl. 26, 301) angegeben, nämlich

$$\varrho_{n,r} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \frac{1}{r^\mu} \sum_{\mu=0}^r \binom{n+1}{\mu} \left(r - \frac{n+1}{2}\right)^\mu (n+1-r)^{r-\mu} + \frac{r(n+1)}{n+1-r} \binom{n}{r} \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\mu r^\mu} \left(r - \frac{n+1}{2}\right)^\mu \right\}$$

für $\frac{n+1}{2} \leq r \leq n$. Dann ist $\varrho_{n,r}^* = \varrho_{n,r}$ für $\frac{n+1}{2} \leq r \leq n$ und $\varrho_{n,r}^* = \varrho_{n,n+1-r}$ für $1 \leq r < \frac{n+1}{2}$. Pisot (Freiburg i. Br.).

Oppenheim, Alexander: Rational approximations to irrationals. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 602—604 (1941).

Verf. beweist: Ist x irrational und sind p und q zwei ganze, zueinander relativprime Zahlen, so daß $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ ($q > 0$), so muß $\frac{p}{q}$ mit einem der drei Brüche: $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p' + p''}{q' + q''}$, $\frac{p' - p''}{q' - q''}$ zusammenfallen, wobei $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'}{q'}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von x sind und wenigstens einer der beiden Brüche $\frac{p' + \varepsilon p''}{q' + \varepsilon q''}$ ($\varepsilon = \pm 1$) die Ungleichung

$$\left| x - \frac{p' + \varepsilon p''}{q' + \varepsilon q''} \right| < \frac{1}{(q' + \varepsilon q'')^2}$$

erfüllt. Dieser Satz ist zum Teil bekannt (Koksma, Diophantische Approximationen, S. 36, Berlin 1936; dies. Zbl. 12, 396). *E. Hlawka (Wien).*

Vijayaraghavan, T.: On the fractional parts of the powers of a number. 1. J. London Math. Soc. 15, 159—160 (1940).

Man setze $\{x\} = x - [x]$. Es sei $\theta > 1$ rational und nicht ganz. Dann hat die Folge $\{\theta^1\}$, $\{\theta^2\}$, $\{\theta^3\}$, ... unendlich viele Häufungswerte. Verf. gibt einen Beweis dieses Satzes und teilt noch einen anderen, von A. Weil herrührenden Beweis mit.

Jarník (Prag).

Robinson, Raphael M.: On the simultaneous approximation of two real numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 512—513 (1941).

Verf. beweist folgenden Satz: Sind ξ_1 und ξ_2 zwei reelle Zahlen, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl s ganze Zahlen a_1, a_2, b , so daß $0 < b \leq s$ und

$$|b\xi_k - a_k| \leq \max\left(\frac{[s^{\frac{1}{k}}]}{s+1}, \frac{1}{[s^{\frac{1}{k}}] + 1}\right) \quad (k = 1, 2)$$

ist. Der Satz ist scharf.

E. Hlawka (Wien).

Veldkamp, G. R.: Ein Transzendenz-Satz für P -adische Zahlen. J. London Math. Soc. 15, 183—192 (1940).

Verf. beweist im P -adischen die Transzendenz von ω^θ , wenn ω eine von 0 und 1 verschiedene algebraische P -adische Zahl mit $|\omega - 1|_P \leq P^{-1}$ ist und wenn θ eine algebraische irrationale P -adische Zahl ist. Der Beweis überträgt die Methode von Th. Schneider (dies. Zbl. 10, 105) ins P -adische. Es wird ein Widerspruch hergeleitet aus der Annahme, daß $\omega, \theta, \omega^\theta$ einen endlichen algebraischen Körper K erzeugen. Hierzu bildet man Ausdrücke von der Form $L(x) = \sum_{x=0}^{k-1} P_*(x)\omega^{*x}$, wobei

die $P_*(x)$ Polynome mit ganzen Koeffizienten aus K bedeuten. Diese Koeffizienten werden so bestimmt, daß $L(x) = 0$ für $x = \alpha P + \beta P\theta$ ($1 \leq \alpha \leq m$; $1 \leq \beta \leq m$). Es wird nun gezeigt, daß man eine solche Form $L(x)$ bilden kann, für welche $L(aP + bP\theta) \neq 0$ ($m < a \leq 2m$; $m < b \leq 2m$) ist. Für den Betrag $|L(aP + bP\theta)|_P$ kann man eine obere und eine untere Schranke bestimmen. Durch geeignete Wahl von k und m widersprechen sich die gefundenen Schranken. *Pisot.*

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

● **Ramsey, A. S.:** An introduction to the theory of newtonian attraction. Cambridge: Univ. press 1940. IX, 184 pag.

Bădescu, Radu: Sur une extension du mouvement tautochrone plan. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 24, 89—93 (1941).

Soll die durch O gehende ebene Kurve C Tautochrone unter der Einwirkung einer Kraft F mit den Komponenten X, Y sein, so gilt längs ihrer $Xdx + Ydy = -c \cdot ds$, wo die Bogenlänge s von O ab rechnet. Allgemein untersucht Verf. die Gleichung (1) $Xdx + Ydy = F(s)ds$ mit gegebenem $F(s)$ und $F(0) = 0$ oder -1 . Bei vorgegebenem Kraftfeld ist (1) mit der Nebenbedingung $dx^2 + dy^2 = ds^2$ zu integrieren. Ist $F = F(s)$, so fällt die gesuchte Kurve mit der Kraftlinie durch O zusammen und umgekehrt. Im allgemeinen Fall kann man (1) auflösen

$$\frac{dx}{ds} = (XF_t \mp YF_n)F^{-2}, \quad \frac{dy}{ds} = (YF_t \pm XF_n)F^{-2}, \quad F_t = F(s),$$

$$F_n = \sqrt{X^2 + Y^2 - F(s)^2}, \quad F^2 = X^2 + Y^2$$

und z. B. den Sonderfall eines Potentialfeldes weiter verfolgen. Bringt man z. B. einen glatten Kurvenbogen durch O in die Gestalt

$$y = \frac{1}{2} \int_0^x (X(t) - X^{-1}(t)) dt,$$

so ist er eine Tautochrone ($F(s) = -s$) des Kraftfeldes mit dem Potential $\frac{1}{2} \left(y - \int_0^x X(t) dt \right)^2$.
Harald Geppert (Berlin).

Hamel, Georg: Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens. *Math. Z.* 48, 27—47 (1942).

L'A. étudie des exemples du mouvement plan d'un fil inextensible OE , dont les extrémités sont O fixe, E libre, connaissant la forme et la vitesse initiales. Pailloux, puis Kucharski ont montré que la fixité d'une extrémité pouvait conduire à des paradoxes si on voulait maintenir toutes les hypothèses habituelles de continuité. — Dans la partie I, l'A. considère un fil idéal sans raideur, abandonné horizontalement sans vitesses, et se propose l'étude du mouvement initial. Dans ce problème difficile, l'A. imagine la propagation d'une discontinuité K le long du fil, d'abscisse curviligne $s_0 = at^x$, posée a priori. La portion KE est supposée tomber horizontalement, et l'A. détermine $x(s, t)$. Les calculs sont beaucoup plus délicats sur la portion OK où x et y s'expriment en fonction du temps et de la variable $z = s/at^x$ grâce aux solutions de l'équation différentielle de Gauß. Les différentes conditions aux limites permettent de déterminer $x = 4/3$ et a . En K la tangente varie continuellement le long du fil, mais la courbure et l'accélération y sont discontinues. — Dans la partie II, l'A. traite le même problème en supposant que le fil possède de la raideur, et va rester constamment rectiligne. Les hypothèses de raideur sont énoncées, puis simplifiées, pour faciliter les calculs et la discussion. Finalement sont données des conditions suffisantes pour que le fil puisse tomber jusqu'à la verticale. — Dans la partie III, 1° l'A. reprend l'étude des équations des fils inextensibles et sans raideur. Elles sont écrites en supposant une force extérieure donnée, seulement fonction du temps, $X(t)$, $Y(t)$. La fonction inconnue choisie est l'angle θ de la tangente au fil avec l'axe des x . D'où des équations dues à Routh très commodées dans le cas du mouvement plan. — 2° Il est possible de fournir une solution exacte de ces équations en supposant constante la tension S . Si on veut que l'extrémité $s = 0$ soit fixe, on doit avoir une condition qui s'énonce élégamment ainsi: la courbe $x = \int X dt$, $y = \int Y dt$ doit être un cercle. — L'A. donne ensuite un exemple de mouvement de fil pesant dont une extrémité se déplace horizontalement (mouvement bien déterminé). Le fil se trouve constamment sur une cycloïde de grandeur fixe tombant en chute libre (intervalle de temps borné). — 3° L'A. aborde des procédés d'approximation pour résoudre les équations du mouvement des fils (fil presque rectiligne et autres hypothèses simplificatrices). La méthode de séparation des variables ramène aux fonctions de Bessel et Neumann. Un système de 4 équations intégrales de 1^{ère} espèce résoud le problème pour certaines conditions aux limites. On procède différemment si une extrémité est libre, mais le problème se complique si l'autre extrémité est fixe. — 4° Procédés d'approximations successives sans l'étude de la convergence. — 5° Supposant données la position et les vitesses initiales compatibles avec la fixité d'une extrémité, l'autre étant libre, l'A. montre par un développement en t jusqu'au 2^e ordre (condition nécessaire), qu'on a une contradiction si la tangente initiale au fil n'a pas une direction bien déterminée.
Pailloux.

Turrière, Émile: Étude mécanique des câbles de téléphériques. La flèche en charge des câbles aériens. *An. Fac. Ci. Pôrto* 24, 129—171 u. 193—213 (1939).

Die Arbeit behandelt die Bestimmung der Gleichgewichtsform der Tragseile von Seilbahnen unter der Wirkung von Eigengewicht und Nutzlast. Die Ableitung der Seilkurven verwendet Kettenlinien und hieraus durch Reihenentwicklung abgeleitete Näherungen. Die Untersuchungen erstrecken sich unter Vernachlässigung der Seildehnung auf Seile mit symmetrischen und unsymmetrischen Randbedingungen und mit einer Einzellast in einem beliebigen Seilpunkt. Die Näherungsrechnung wird an

Beispielen von bestehenden Anlagen unter Nachprüfung der auftretenden Seilspannungen erörtert. *Arendt* (Grube Erika O./L.).

Zeeb, Th.: Zum Abklingen nichtlinearer Schwingungen. Ing.-Arch. **13**, 21–33 (1942).

Verf. untersucht das Abklingen der gedämpften Schwingung bei nichtlinearer, insbesondere kubischer Kennlinie an Hand der Systemsenergie. Als Umrißlinien im Fahrplan werden die Kurven definiert, die man erhält, wenn man als Funktion der Zeit denjenigen Ausschlag aufträgt, dessen potentielle Energie der augenblicklichen Gesamtenergie des Schwingers entspricht. Für diese Umrißkurven, welche durch die Umkehrpunkte des Fahrplans gehen und einen gewellten Verlauf haben, liefert der Energiesatz eine Differentialgleichung, die allerdings noch den unbekannten Ausschlag enthält. Indem man das betreffende Glied durch einen Mittelwert ersetzt, gewinnt man eine vom Ausschlag freie Differentialgleichung, deren Integration die geglätteten Umrißkurven und damit ein Bild über die Art des Abklingens ergibt. *H. Ziegler.*

Nadile, Antonio: Sopra una forma semplice delle equazioni del moto dei solidi. Boll. Accad. Gioenia Sci. Nat. Catania, III. s. Fasc. **14**, 26–32 (1940).

Die Gleichungen von Appell in ihrer allgemeinsten Form werden auf die Bewegung eines starren, von Bindungen freien Körpers angewendet. Als kinetische Charakteristiken wählt Verf. die Komponenten (nach einem im Körper festen Achsenkreuz *Oxyz*) der Geschwindigkeit v_0 von *O* und der Winkelgeschwindigkeit ω . Die sechs entstehenden Gleichungen fallen mit denen zusammen, die sich durch Projektion der Grundgleichungen der Bewegung auf die im Körper festen Achsen ergeben $\left(\frac{d}{dt} \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}, \frac{d}{dt} \mathfrak{R} = \mathfrak{M} - \mathbf{v}_0 \times \mathfrak{Q}\right)$. *Cattaneo* (Roma).

Venturelli, Lucia: Sul moto di un sistema rigido pesante un punto del quale è vincolato a una retta fissa. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 393–403 (1942).

Verf. nimmt sich vor, die Bewegung eines schweren, starren Körpers zu studieren, wenn ein bestimmter Punkt *O* des Körpers gezwungen ist, eine feste horizontale Gerade zu beschreiben, und zwar unter der Bedingung, daß die Rotationsachse eine feste Richtung im Raume besitzt. Falls die Rotationsachse eine vertikale, durch den Schwerpunkt hindurchgehende Gerade ist, so muß sie eine Hauptachse des Trägheitsellipsoides von *O* sein. Ferner ist die Drehung gleichmäßig und die Bewegung von *O* ebenfalls gleichmäßig. Falls aber die Rotationsachse horizontal und senkrecht zu der festen Geraden liegt, so muß sie ebenfalls eine Hauptachse sein und der Schwerpunkt in der Ebene der anderen zwei Hauptachsen liegen. Für spezielle Rotationsformen des Trägheitsellipsoides werden diese Bedingungen etwas verändert. Der Fall des allgemeinen Trägheitsellipsoides wird vollständig behandelt. Schließlich betrachtet Verf. ähnliche Fälle, wo die feste, von *O* beschriebene Gerade nicht mehr horizontal ausfällt.

V. Válcovici (Bucureşti).

Roy, Louis: Sur le frottement de roulement. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 601–604 (1942).

On peut rencontrer, dans les problèmes de roulement où l'on tient compte d'un couple de résistance obéissant à des lois du type «lois de Coulomb», un cas d'impossibilité analogue à celui que Painlevé a signalé pour les problèmes de glissement lorsqu'on y tient compte du frottement. L'A. le met en évidence sur un exemple simple: disque circulaire roulant (sans glisser) sur le plan incliné figuré par une face d'un bloc lui-même mobile sans frottement sur un plan horizontal. L'impossibilité se présente lors de certaines conditions initiales (ici: disque lancé vers le bas), dès que le rapport $\frac{\delta}{a}$ du coefficient de résistance au roulement au rayon du disque dépasse une certaine limite

$$A = \frac{1}{1 - \mu} \left[\left(\frac{k^2}{a^2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{\frac{k^2}{a^2} + \mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right],$$

$\left(\mu = \frac{\text{masse (bloc)}}{\text{masse (bloc + disque)}}, k: \text{rayon de giration du disque}, \alpha: \text{inclinaison du plan}\right)$.
 L'analogie avec le cas du glissement (où f remplace $\frac{\delta}{a}$) est complète. — L'A. montre que l'on peut faire en sorte que A soit de l'ordre de petitesse où se cantonne $\frac{\delta}{a}$ dans les cas usuels. Il termine en signalant, d'après M. Jouguet, qu'il suffit, pour lever tout paradoxe, d'admettre que $\frac{\delta}{a}$ (de même que f) ne prend pas instantanément la valeur constante qui lui est attribuée, mais croît très rapidement de zéro à cette valeur.

R. Mazet.

Agostinelli, Cataldo: *Sulla variazione dell'ora terrestre*. Atti Accad. Sci. Torino **77**, 130—153 (1942).

Bei Untersuchungen über Ungleichmäßigkeiten der Erdrotation fanden sich unter anderem auch Schwankungen mit der Periode eines Mondumlaufs. Verf. untersucht, ob solche Schwankungen theoretisch erklärt werden können. Er zeigt, daß die Annahme, daß alle 3 Hauptträgheitsmomente verschieden sind, Schwankungen von der Periode eines Tages, aber nicht von der Periode eines Mondumlaufs erklären kann. Hingegen können gezeitenartige Erscheinungen die Ursache hierfür sein.

G. v. Schrutka (Hamburg).

Goldsbrough, G. R.: *The theory of the division in Saturn's rings*. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **239**, 183—216 (1941).

Im Anschluß an seine früher über diesen Gegenstand veröffentlichte Arbeit [Philos. Trans. Roy. Soc. London A **222**, 101—130 (1921)] entwickelt Verf. hier eine völlig neue mathematische Theorie der Teilungen bzw. Lücken der Saturnringe. Die angewandte Methode unterliegt nicht mehr den Einwänden, die gegen das Verfahren in der ersten Arbeit erhoben worden sind. Es werden gewisse periodische Bahnen betrachtet, welche die das Ringsystem bildenden Partikeln beschreiben, wenn ein bestimmter Satellit als störender Körper berücksichtigt wird. Wie im restringierten Dreikörperproblem wird die Bahn des betreffenden Saturnmondes als kreisförmig angenommen. In der Ebene der Bahn dieses Satelliten wird die Bewegung eines Systems kleiner (gleich großer), in Länge gleichmäßig verteilter Massen in der Weise untersucht, daß nach der von Poincaré aufgestellten Methode der periodischen Lösungen eine Familie solcher periodischer Bahnen bestimmt wird, die in Abhängigkeit von den Massen, von der Anzahl der Partikeln und von einem einzigen Parameter Ω steht. Den Partikeln werden sodann kleine willkürliche Verrückungen erteilt und die zugehörigen Variationsgleichungen aufgestellt. Diese können als Potenzreihen integriert und die charakteristischen Exponenten bestimmt werden. Bewegungen mit reellen charakteristischen Exponenten ergeben sich als instabil, solche mit imaginären Exponenten als stabil. — Die beobachteten Lücken in den Saturnringen entsprechen sehr genau solchen derart bestimmten instabilen Bewegungen. Auch die Enckesche Teilung, die in der ersten Arbeit eine zusätzliche Hypothese erforderlich machte, ergibt sich ohne weiteres aus der vorliegenden Theorie. Neben den Teilungen des Ringes ergibt sich aus den Stellen der Instabilität auch die Lage der inneren und äußeren Grenze desselben in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Weiterhin ergibt sich, daß die Struktur des ganzen beobachteten Ringsystems durch den innersten Mond Mimas bestimmt ist, während die den übrigen Satelliten zugehörigen kritischen Entfernungen — mit einer Ausnahme bezüglich Enceladus — außerhalb des beobachteten Ringgebietes liegen.

E. Rabe (Berlin).

Elastizität, Akustik:

Udeschini, Paolo: *Deformazione omografica elastica*. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **74**, 469—483 (1941).

Die Verschiebungen der Punkte eines elastischen isotropen Körpers werden als quadratische Formen in den kartesischen Koordinaten x, y, z vorausgesetzt, so daß

die Deformationskomponenten, und folglich auch die Spannungskomponenten, als linear in x, y, z erscheinen (homographische Deformation). Sind die Elastizitätsgleichungen im Inneren des Körpers erfüllt (Massenkräfte werden dabei als nicht vorhanden vorausgesetzt), so folgt, daß von den 18 Koeffizienten der quadratischen Formen nur 15 wesentlich sind. Die homographischen Deformationen bilden also ein Linearsystem ∞^{15} . Wird ferner von Vertauschungen der x, y, z untereinander abgesehen, so erhält man 5 wesentlich verschiedene Typen, aus denen alle homographische Deformationen sich linear zusammensetzen lassen und von denen nur 3 als neu erscheinen. Diese werden genau diskutiert im Falle eines Kubus $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$. — Zuletzt betrachtet Verf. auch elastoplastische Körper unter Anwendung einer Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes, die er neuerdings vorgeschlagen hat [Ist. Lombardo, Rend. **74**, 373—388 (1941)]. Es wird bewiesen, daß die elastoplastischen homographischen Deformationen noch immer elastische homographische Deformationen sein müssen; nur hängen sie hier nur von 12 wesentlichen Parametern ab. *Conforto*.

Cisotti, Umberto: *Formule integrali relative alla meccanica dei sistemi continui*. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 404—410 (1942).

Herleitung von zwei Integralformeln, die sich auf Tensorfelder der Kontinuumsmechanik beziehen. Für die Elastomechanik ergeben sich die bekannten Beziehungen für das Gleichgewicht der Spannungen, das verallgemeinerte Hookesche Gesetz und die elastische Energie.

H. Neuber (Braunschweig).

Locatelli, Piero: *Spunti di scienza delle costruzioni per corpi imperfettamente elastici*. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 719—724 (1942).

Der Vortrag gibt einen Überblick über die für eine Theorie des unvollkommen elastischen Körpers zu entwickelnden allgemeinen Theoreme (Minimalprinzipie usw.). — Die Ausführung der Gedanken findet sich in mehreren Einzelarbeiten des Verf., die z. T. zur Zeit des Vortrags im Druck waren, z. T. inzwischen veröffentlicht worden sind (vgl. dies. Zbl. **25**, 272, 273 u. a.).

Marguerre (Adlershof).

Minelli, C.: *Problemi variazionali nella scienza delle costruzioni*. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 736—744 (1942).

Es wird über verschiedene Anwendungen des Prinzips $L - U = \text{Min.}$ auf Fragen aus der Theorie der Baukonstruktionen berichtet, die der Verf. in vorhergehenden Arbeiten ausführlicher behandelt hat. Ein besonderer Vorteil der variationalen Methoden besteht darin, daß es keinen Unterschied ausmacht, ob das betrachtete System statisch bestimmt ist oder nicht. Bei den hier gegebenen Anwendungen handelt es sich um hochgradig statisch unbestimmte Systeme wie Vierendeel-Träger, Roste, auf vielen Stäben aufgehängte Träger u. dgl. Der Verf. zeigt, daß derartige Systeme durch Verbindung der einzelnen Träger zu einer „Decke“ oder einem „Vorhang“ in kontinuierliche Systeme umgewandelt werden können, was für die Anwendung der variationalen Methode eine große Vereinfachung bedeutet. Auch der Kastenträger ist für diese Methode besonders geeignet. Zum Schlusse wird als neues, bisher noch nicht behandeltes Problem das der großen Verdrehungen einer rechteckigen Lamelle um eine Mittelachse gegeben, wobei in den Verzerrungskomponenten die vollständigen, nicht-linearen Ausdrücke eingeführt werden. Verzeichnis der einschlägigen Schriften des Verf.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Pierrottet, Ernesto: *Nuovi reperti sul comportamento dei sistemi elastici*. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 730—735 (1942).

Übertragung des an früherer Stelle [Atti Accad. Sci. Torino **75**, 47—60 (1939)] für den starr gelagerten elastischen Körper entwickelten Minimalprinzips auf den allgemeineren Fall elastischnachgiebiger Lagerung.

Marguerre (Adlershof).

Biezono, C. B.: *On a special case of bending*. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 438—442 (1942).

Ein Träger kann ohne Reibung über 2 Auflager gleiten und trägt in der Mitte eine Punktlast, die große Durchbiegungen verursacht. Wird die Größe der Auflager-

kraft als bekannt angenommen, so kann die Mittellinie gezeichnet werden. Um die Genauigkeit der Zeichnung zu prüfen, wird die Durchbiegung des Punktes berechnet, in dem der Zuwachs des Tangentenwinkels gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Hierbei wird die Tangente der Mittellinie im Auflager als Abszissenachse gewählt. Haben die Größe der Auflagerkraft und die Biegesteifigkeit andere Werte, so bleibt bei passender Wahl der Längeneinheit die Mittellinie ungeändert. Bei dieser zeichnerischen Methode kann die Reibung in den Auflagern berücksichtigt werden. Anm. d. Ref.: In Gleichung (2) fehlt auf der rechten Seite der Faktor $\frac{1}{2}$.
Ludwig (Hannover).

Gran Olsson, R.: Elastische Knickung gerader Stäbe von exponentiell veränderlichem Querschnitt unter dem Einfluß ihres Eigengewichtes. Ing.-Arch. 13, 162—174 (1942).

Nimmt die Querschnittsfläche nach dem Gesetz $F = F_0 \exp \left[\frac{\gamma}{\sigma} (l - x) \right]$ ab, so nimmt das Trägheitsmoment nach dem Gesetz $I = I_0 \exp \left[n \frac{\gamma}{\sigma} (l - x) \right]$ ab. Ist der Querschnitt ein Rechteck, dessen kleinere oder größere Seite unveränderlich bleibt, so ist $n = 1$ oder 3. Ist der Querschnitt ein regelmäßiges Vieleck, so ist $n = 2$. Führt man die dimensionslose unabhängige Veränderliche $z = \frac{l - x}{l}$ ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{n \gamma l}{\sigma} \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\sigma F_0}{E I_0} l^2 \left[e^{-(n-1) \frac{\gamma l}{\sigma} z} - e^{-n \frac{\gamma l}{\sigma} z} \right] \frac{dy}{dz} = 0.$$

Die mittlere Ordnung wird durch die Substitution

$$\frac{dy}{dz} = v e^{-\frac{n \gamma l}{2 \sigma} z}$$

beseitigt:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left\{ -\frac{n^2}{4} \frac{\gamma^2 l^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma F_0}{E I_0} l^2 \left[e^{-(n-1) \frac{\gamma l}{\sigma} z} - e^{-n \frac{\gamma l}{\sigma} z} \right] \right\} v = 0.$$

Im Falle $n = 2$ werden mit der unabhängigen Veränderlichen

$$\zeta = 2 \frac{\sigma}{\gamma} \sqrt{\frac{\sigma F_0}{E I_0}} e^{-\frac{\gamma l}{\sigma} z}$$

die Exponentialfunktionen durch Potenzen ersetzt:

$$\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dv}{d\zeta} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2\gamma} \sqrt{\frac{\sigma F_0}{E I_0}} \frac{1}{\zeta} - \frac{3}{4\zeta^2} \right) v = 0.$$

Die mittlere Ordnung wird durch die Substitution $v = \frac{u}{\sqrt{\zeta}}$ beseitigt:

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{\zeta} + \frac{\frac{1}{2} - m^2}{\zeta^2} \right) u = 0, \quad k = \frac{\sigma}{2\gamma} \sqrt{\frac{\sigma F_0}{E I_0}}, \quad m = 1.$$

Diese Differentialgleichung hat das allgemeine Integral $u = M_{k,m}(\zeta) \left[c_1 + c_2 \int \frac{d\zeta}{M_{k,m}^2(\zeta)} \right]$,
worin

$$M_{k,m}(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{2} + m} e^{-\frac{\zeta}{2}} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} + m - k}{1 + 2m} \zeta + \frac{(\frac{1}{2} + m - k)(\frac{3}{2} + m - k)}{(1 + 2m)(2 + 2m)} \frac{\zeta^2}{2!} + \dots \right]$$

die Whittakersche Funktion bezeichnet. In dieser Funktion bleiben von der eckigen Klammer nur der 1. Summand, die ersten 2 oder die ersten 3 Summanden übrig, wenn $k = \frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ oder $\frac{7}{2}$ ist. In diesen Fällen ist

$$\int \frac{d\zeta}{M_{k,m}^2(\zeta)} = \frac{1}{2} E i \zeta - e^{\zeta} \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2} \right),$$

$$\frac{3}{2} E i \zeta - e^{\zeta} \left(\frac{7}{6\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta - 3} \right) \text{ oder } 3 E i \zeta - e^{\zeta} \left(\frac{11}{6\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{9}{8} \frac{1}{\zeta - 2} + \frac{1}{24} \frac{1}{\zeta - 6} \right).$$

Ist das untere Ende $\zeta = \zeta_u$ eingespannt und das obere Ende $\zeta = 4k$ frei, so folgt

$$\int_{\zeta_u}^{\zeta_u} \frac{d\zeta}{M_{k,1}^2(\zeta)} = \int_{\zeta_u}^{4k} \frac{d\zeta}{M_{k,1}^2(\zeta)} + \frac{4k}{M_{k,1}(4k) \left[\frac{1}{2} M_{k,1}(4k) + 4k M'_{k,1}(4k) \right]}.$$

Mit dem hieraus berechneten Wert ζ_u wird die Knicklänge

$$l = l n \frac{4k}{\zeta_u} \sqrt[3]{\frac{4k^2 E I_0}{\gamma F_0}}.$$

Im Falle $n=1$ erhält man mit der unabhängigen Veränderlichen $\zeta = e^{-\frac{\gamma l}{2\sigma} z}$ das allgemeine Integral

$$\eta = \sqrt{\zeta} [c_1 J_p(\beta \zeta) + c_2 N_p(\beta \zeta)], \quad p = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{4\sigma^2 F_0}{\gamma^2 E I_0}}, \quad \beta = \frac{2\sigma}{\gamma} i \sqrt{\frac{\sigma F_0}{E I_0}}.$$

Am oberen Ende ist $\zeta = 1$. Aus den Randbedingungen folgt

$$J_p(\beta \zeta_u) : N_p(\beta \zeta_u) = [(p + \frac{1}{2}) J_p(\beta) - \beta J_{p+1}(\beta)] : [(p + \frac{1}{2}) N_p(\beta) - \beta N_{p+1}(\beta)].$$

K. Ludwig (Hannover).

Ylinen, Arvo: Die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes, dessen Material dem Hookeschen Gesetz nicht folgt. Z. angew. Math. Mech. 22, 163—164 (1942).

Die Gleichgewichtsbedingung der an den Endquerschnitten eines Stabelementes wirkenden Kräfte lautet:

$$(1) \quad \varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + Y.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Momente besitzt die folgende Gestalt:

$$(2) \quad \varrho I \frac{\partial^2 y}{\partial t^2 \partial x} = Q - P \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Dabei bedeutet: Q die Schubkraft, P die Längskraft, Y die vertikale Komponente der äußeren Kraft, I das Trägheitsmoment des Querschnittes, M das Moment der Normalspannungen, ϱ die Dichte des Stabes und F die Fläche des Querschnittes. Wird die der Dehnung ε des Materials entsprechende Normalspannung σ durch eine stetige und eindeutige Formänderungsfunktion (3) $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ bestimmt, so kann Verf., wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde (vgl. A. Ylinen, Erweiterung der Bernoullischen Biegungstheorie auf den unelastischen Bereich [Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 57, Nr 7, 10 (1941)]), unter der Bernoullischen Annahme, daß die Ebenen, die vor der Verformung senkrecht zur Achse des Stabes liegen, auch nach der Verformung eben bleiben, für das Moment der Normalspannungen σ die folgende Reihenentwicklung ableiten:

$$(4) \quad M = c_1 a + c_2 a^2 + c_3 a^3 + \dots,$$

wobei $a = -\frac{1 + \varepsilon_s}{R}$ und $c_1 = I \sigma'(\gamma)$, $c_2 = \frac{1}{2!} I_3 \sigma''(\gamma)$,

$$c_3 = \frac{1}{3!} I_4 \sigma'''(\gamma) \left[1 - 3 \frac{I^2}{F I_4} \frac{(\sigma''(\gamma))^2}{\sigma'(\gamma) \sigma'''(\gamma)} \right], \dots$$

ist. Hierin bezeichnet ε_s die Dehnung im Schwerpunkt des Stabquerschnittes, R den Krümmungsradius der elastischen Achse des Stabes, I das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf eine zur Biegungsebene senkrechte, durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende Achse, I_3 und I_4 auf dieselbe Achse bezogene höhere Momente der Querschnittsfläche. γ ist die der mittleren Längsspannung

$\sigma_m = \frac{P}{F}$ entsprechende Dehnung, die durch die Formänderungsfunktion (3) zu

$\sigma_m = \sigma(\gamma)$ bestimmt ist. $\sigma'(\gamma)$, $\sigma''(\gamma)$... sind die Ableitungen von (3) nach ε , wenn ε durch γ ersetzt wird. — Führt man für die Krümmung der elastischen Achse des

Stabes $\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ein, so nimmt die Entwicklung für M die folgende Gestalt an:

$$M = -c_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - c_3 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 + \dots$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (2) und Elimination der Querkraft Q aus dieser Gleichung und der Gleichgewichtsbedingung (1) ergibt sich die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes, dessen Material dem

Formänderungsgesetz (3) folgt:

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[c_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 - \dots \right] = \varrho I \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + Y.$$

Verf. zeigt, daß diese Differentialgleichung für den Fall, daß das Hookesche Gesetz an Stelle der allgemeinen Formänderungsfunktion tritt, in die bekannte Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axialbelasteten geraden Stabes übergeht. Schließlich wendet er das geschilderte Verfahren noch zur Herleitung der Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt an.

Wegner (Heidelberg).

Weber, Constantin: Halbebene mit periodisch gewelltem Rand. *Z. angew. Math. Mech.* **22**, 29—33 (1942).

Mit Hilfe einer geeigneten, konformen Abbildung gelingt dem Verf. die geschlossene Lösung der Airyschen Spannungsfunktion für die zugbeanspruchte Halbebene mit periodisch gewelltem Rand. Für die periodische Kerbe, deren Tiefe gleich dem Krümmungshalbmesser ist, berechnet sich hiernach die Spannungserhöhung zu 2,13 (an Stelle von 3,07 für die einmalige Halbkreiskerbe). *H. Neuber* (Braunschweig).

Reutter, F.: Eine Anwendung des absoluten Parallelismus auf die Schalentheorie. *Z. angew. Math. Mech.* **22**, 87—98 (1942).

Um die an einem Schalenstück angreifenden Kräfte und Kraftmomente zu Resultierenden zusammenzusetzen, werden sie nicht im euklidischen Raum, sondern auf der Mittelfläche der Schale nach dem absoluten Parallelismus verschoben. Der Parallelismus kann von der euklidischen Ebene sofort auf alle in eine Ebene abwickelbaren Flächen übertragen werden. Auf einer Fläche, deren Gaußsche Krümmung $\neq 0$ ist, wird der absolute Parallelismus nach Levi-Civita mit Hilfe der Torse definiert, die die Fläche längs des Verschiebungsweges berührt. Für die Komponenten des verschobenen Vektors werden lineare homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung aufgestellt, deren Koeffizienten Linearformen Christoffelscher Symbole sind. Für eine Schale mit veränderlicher Dicke werden die linearisierten Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt. Als Parameterlinien der undeformierten Mittelfläche werden die Krümmungslinien gewählt. Die Dehnungen und der Verschiebungswinkel in der Mittelfläche werden vernachlässigt. Die Resultanten und Spannungsmomente werden durch Integrale über die Schalendicke dargestellt. Die an einem Rechteck angreifenden Kräfte und Kraftmomente werden längs des Umfanges in der M_3 verschoben, die aus den Parametern der Mittelfläche durch Hinzunahme der Bogenlänge auf ihren Normalen entsteht. Die Fundamentalgrößen der verformten Mittelfläche werden unter den Voraussetzungen berechnet, daß die zur unverformten Mittelfläche senkrechten Strecken ungedehnt, ungekrümmt und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben. Die metrischen Fundamentalgrößen werden mit Hilfe der Dehnungen und des Verschiebungswinkels in der Mittelfläche und die 2. Ordnung nach dem absoluten Parallelismus berechnet. Anm. d. Ref.: Für die Verschiebung längs C_u ist $du = 0$, längs C_v ist $dv = 0$. Die rechten Seiten der Gleichungen (12) und der nächsten 3 Gleichungen widersprechen sich in den Vorzeichen. S. 92, viertletzte Zeile auf den rechten Seiten fehlt der Faktor -1 . Auf S. 93 in der 2. Gleichung und der 1. Gleichung (13) widersprechen sich die Vorzeichen der Summanden mit N_1, T_2, S_2 oder N_2 . *Ludwig*.

Gran Olsson, R.: Unsymmetrische Biegung der Kreisplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit. *3. Mitt. Ing.-Arch.* **13**, 147—154 (1942).

In früheren Arbeiten [Ing.-Arch. **10**, 14—27 (1939); **11**, 259—264 (1940); dies. *Zbl.* **20**, 227; **23**, 412] hatte Verf. gezeigt, daß sich die Plattengleichung vierter Ordnung aufspalten läßt in zwei Gleichungen zweiter Ordnung, wenn die Plattensteifigkeit N in Radialrichtung quadratisch veränderlich ist $N = N_1 \cdot r^2$. Verf. beweist nun die gleiche Erscheinung der Aufspaltung für das Gesetz $N = N_0 + N_1 r^2$. Die Lösungen der homogenen Gleichung werden für $N_0 \neq 0$ allerdings komplizierter, sie werden unendliche Reihen, die Produkte aus hypergeometrischen und trigonometrischen Funk-

tionen enthalten. Das partikuläre Integral der inhomogenen Gleichung muß durch Probieren gefunden werden. Es folgt als Zahlenbeispiel eine gleichmäßig belastete Platte bei gelenkig gelagertem Außenrand. Bei axial-symmetrischer Durchbiegung kann die volle Lösung für die durchlochte Platte angegeben werden. *Collatz.*

Grioli, G.: *Calcolo delle deformazioni e delle sollecitazioni nei diaframmi distributori di turbine a vapore.* Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 425—431 (1942).

Das Problem der Spannungen und Formänderungen von Turbinenscheiben unter Einwirkung der Querbeanspruchung führt auf die Berechnung einer unsymmetrisch belasteten Kreisringplatte. Verf. gibt zur Lösung zwei Verfahren an, ein Verfahren des kleinsten Fehlerquadrates der über den betrachteten Bereich integrierten Differentialgleichung sowie ein Verfahren der Einführung transformierter Größen als neue Unbekannte nach Picone. Eine Durchführung der Rechnung ist nicht wiedergegeben.

H. Neuber (Braunschweig).

Conforto, Fabio: *Sulle deformazioni elastiche di un diedro omogeneo e isotropo.* Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. 70, 1—71 (1941).

Verf. berichtet über eine im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo durchgeführte Untersuchung, die die Berechnung der elastischen Deformation eines unendlichen homogenen isotropen Dieders unter dem Einfluß einer in einem Punkte der Kante senkrecht zu einer der Seitenflächen angreifenden Einzelkraft betrifft. Es handelt sich um ein schwieriges Problem der Integration partieller Differentialgleichungen, indem man die Gleichungen der Elastizitätstheorie in einem unbeschränkten Gebiet angreifen muß und in keiner Weise eine Reduktion auf ein ein- oder zweidimensionales Problem möglich ist. Die vom Verf. verfolgte Integrationsmethode ist die von M. Picone (dies. Zbl. 18, 257) eingeführte Integralmethode. Nach diesem Verfahren übersetzt Verf. zunächst das ursprüngliche partielle Differentialgleichungssystem in die Integration eines wohl bestimmten Systems linearer Integralgleichungen. Hierauf gelangt Verf. durch Gleichsetzen der Momente beider Seiten dieser Gleichungen bezüglich eines passend gewählten, im entsprechenden Bereich vollständigen Funktionensystems dazu, das ursprüngliche System in ein System unendlich vieler Integralgleichungen vom Fischer-Rieszschen Typus überzuführen, das er in erster Annäherung in zwei numerischen Spezialfällen löst. Durch Übergang zu der ursprünglichen Problemstellung gibt schließlich Verf. in den beiden betrachteten numerischen Fällen die elastische Verformung des Dieders sowohl mittels einer graphischen Darstellung als auch in numerischen Tafeln an und zeigt, daß schon diese erste Annäherung vollkommen eine Reihe von Eigenschaften widerspiegelt, die man intuitiv der Lösung des Problems zuzuschreiben geneigt ist.

C. Tolotti (Roma).

Hydrodynamik:

Germani, D.: *Établissement par voie élémentaire des équations de Navier-Stokes.* C. R. Acad. Sci. Roum. 5, 155—159 (1941).

Verf. bringt eine elementar-geometrische Betrachtung des Deformationstensors einer Flüssigkeit, falls die Deformation zunächst nur in der xy -Ebene vor sich geht. — Dann werden die bekannten Beziehungen zwischen Spannung und Deformation aufgestellt, die schließlich auf den dreidimensionalen Fall ausgedehnt werden.

V. Válcovici (Bucureşti).

Eigenson, L. S.: *Analyse der Ähnlichkeit von Erscheinungen der Wärmeleitfähigkeit und der Hydrodynamik.* Bull. Acad. Sci. URSS, Cl. Sci. techn. Nr 5, 85—98 (1941) [Russisch].

Wenn man in den Differentialgleichungen (einschließlich der Randbedingungen) eines physikalischen Vorgangs an Stelle der dimensionsbehafteten Maßgrößen für die Variablen und charakteristischen Parameter dimensionslose Kenngrößen einführt, lassen sich aus den Gleichungen die für den Vorgang charakteristischen Ähnlichkeits-

beziehungen gewinnen. Die erfaßbaren Probleme müssen derart sein, daß die Randbedingungen die erforderlichen Transformationen gestatten, und es ist vorauszusetzen, daß das Problem eine eindeutige (wenn auch bei dem heutigen Kenntnisstand nicht notwendig mathematisch herstellbare) Lösung besitzt. Als Beispiele werden durchgeführt: 1. instationäre Wärmeleitung in einem festen Körper bei Konstanz und bei Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme und des Wärmeleitungskoeffizienten; 2. zweidimensionale Strömung einer zähen Flüssigkeit mit und ohne Einfluß der Schwerkraft.

Straßl (Göttingen).◦

Ramponi, F.: *Nota sulla propagazione delle perturbazioni di regime nei canali aperti.* Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 493—502 (1942).

De Saint Venant hat für den Fall nichtpermanenter Abflüsse die Kontinuitätsgleichung und die dynamische Gleichung aufgestellt, in welchen neben der Wassertiefe und der mittleren Wassergeschwindigkeit noch deren partielle Ableitungen nach dem Weg und nach der Zeit figurieren. Um die Fortpflanzung irgendeiner Störung eines Abflusses in einem Gerinne zu verfolgen, führt man vorteilhaft in diese Gleichungen den Zuwachs der Wassertiefe und der Geschwindigkeit ein. Die Integration der entsprechend umgeformten partiellen Differentialgleichungen bietet aber bekanntlich große Schwierigkeiten. Boussinesq, Deymié, Massé u. a. haben sich darum bemüht. Bonvicini hat für diese Integration einen Weg gezeigt, der für den Tiefenzuwachs und für den Geschwindigkeitszuwachs zu Exponentialfunktionen von komplexen Größen führt. Der reelle Teil dieser Lösung gibt an, wie die Wassertiefe bzw. die Geschwindigkeit mit dem Weg abnimmt, der imaginäre Teil läßt sich in eine Kosinus-Funktion umwandeln, aus welcher sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ableiten läßt. Ramponi hat nun diese Lösung von Bonvicini näher studiert und die Schnelligkeit der Welle sowie deren Abklingen als Funktion der Periode der Welle berechnet. Es sind dann vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem es sich um eine stromabwärts oder eine stromaufwärts wandernde Welle handelt und je nachdem, ob die Periode der Welle lang oder kurz ist. Stromabwärts fahrende Wellen mit langer Periode nehmen in ihrer Höhe fast nicht ab. Ist die Periode dagegen kurz, so kann eine Welle auf 1000 m Distanz bis auf 20% ihres Anfangswertes abklingen. Stromaufwärts fahrende Wellen klingen alle auf 60 bis 80% ihres Anfangswertes ab. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt in beiden Fällen mit der Länge der Periode ab. Verf. hat diese Resultate an Hand von Versuchen, die in einem andern Aufsatz veröffentlicht worden sind [*Energia elettr.* 17, 643—653 (1940)], überprüft. Die Versuche wurden sowohl auf der Etsch als in der Versuchsanstalt von Padua durchgeführt und haben die Theorie unter Vorbehalt gewisser Streuungen bestätigt. *E. Meyer-Peter.*◦

Schlichting, H.: *Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen.* Luftf.-Forschg. 19, 179—181 (1942).

Um einige Abschätzungen über die Beeinflussung der Grenzschicht durch Absaugen oder Ausblasen zu gewinnen, werden die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen für den Fall der Strömung längs einer ebenen Platte bei konstantem äußeren Druck (unter Vernachlässigung der sog. Senkenwirkung) und bei kontinuierlicher Absaugung (die Normalgeschwindigkeit an der Wand ist als stetige Funktion der Bogenlänge vorgegeben) aufgeschrieben und daraus durch Integration der Kármán'sche Impulssatz gewonnen. Mit seiner Hilfe wird das Anwachsen der Grenzschicht- und Impulsdicke abgeschätzt und graphisch dargestellt. Für große Bogenlängen x ergibt sich bei konstanter Absaugung das folgende asymptotische Gesetz: Beim Ausblasen wächst die Grenzschichtdicke proportional x , bei undurchlässiger Wand (Blasius) proportional \sqrt{x} , während sie bei Absaugung einem konstanten endlichen Wert zustrebt. Für den letzteren Grenzfall lassen sich die Grenzschichtgleichungen geschlossen lösen, wobei sich für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht ein sehr einfacher Ausdruck ergibt.

W. Mangler (Göttingen).◦

Schmidt, Harry, und Kurt Schröder: Die Prandtl'sche Grenzschichtgleichung als asymptotische Näherung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen bei unbegrenzt wachsender Reynoldsscher Kennzahl. Dtsch. Mth. 6, 307—322 (1942).

Das Ziel der Arbeit ist die genaue Angabe aller Voraussetzungen, aus denen in einer mathematisch völlig einwandfreien Weise die bekannte Grenzschichtgleichung gewonnen werden kann. Nachdem in § 3 die Navier-Stokesschen Gleichungen auf das s, n -System umgerechnet worden sind, werden in § 4 die Voraussetzungen formuliert. Es handelt sich um solche Voraussetzungen vor allem, die geeignet sind, die Beschränktheit von v_s und seinen Ableitungen bei $R \rightarrow \infty$ zu garantieren. Die Grenzschichtdicke δ wird eingeführt und für die Normalgeschwindigkeit nur $\delta \frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2} = O(1)$

postuliert. In § 5 ergeben sich dann aus der Kontinuitätsgleichung Beschränktheit der Normalableitung und der gemischten Ableitung von v_n . In § 6 kann jetzt das exakte Ergebnis gewonnen werden, daß $R\delta^2$ beschränkt bleibt, während die zusätzliche Behauptung, daß es nicht gegen null geht, eine neue Voraussetzung ist. Nun kann in § 7 die asymptotische Näherung vollzogen und in § 8 die Grenzschichtgleichung endgültig gewonnen werden. Soweit exakte Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen bekannt sind, kann das Zutreffen der gemachten Voraussetzungen gezeigt werden, während im allgemeinen Fall noch der Existenzbeweis fehlt. *Hamel.*

Wijngaarden, A. van: Laminar flow in radial direction along a plane surface. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 269—275 (1942).

Es seien u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung in Richtung der Zylinderkoordinaten r, φ, z . Verf. untersucht laminare Grenzschichtströmungen an einer ebenen Wand $z = 0$, welche die z -Achse als Symmetrieachse besitzen und deren φ -Komponente v gleich Null ist. Er läßt sich, wie er einleitend mitteilt, von der Vorstellung leiten, daß ein zeitlich konstanter Flüssigkeitszustrom von allen Punkten der z -Achse in den Strömungsraum hinein erfolgt. Er sucht daher Lösungen, für welche sich u außerhalb der Grenzschicht umgekehrt proportional zu r verhält. Er formuliert nun als Randbedingungen neben der Forderung des Haftens an der Wand $z = 0$ die Bedingungen: $u = \text{konst.}/r$ auf der ganzen Kegelfläche $z/r = \text{konst.}$ und $w = c \cdot u$ auf dieser Fläche ($c = \text{konst.}$). Die Kegelfläche wird im Laufe der Rechnung auf die für die Lösungen singuläre Linie $r = 0$ zusammengezogen. Verf. gelangt zu einer Grenzschichtdifferentialgleichung vom Hartreeschen Typus, welche er für $c = 0$ numerisch und in weiteren Fällen $c < 0$ und > 0 graphisch integriert. Er erhält Geschwindigkeitsprofile, welche für alle betrachteten c -Werte Übergeschwindigkeiten aufweisen. Für $c > 0$ besteht darüber hinaus Rückströmung an der Wand. Von einem gewissen positiven Wert von c an entarten die Profile vollends, indem sie eine oder mehrere Unendlichkeitsstellen aufweisen. *Görtler (Göttingen).*

Crocco, Luigi: Sullo strato limite laminare nei gas lungo una parete piana. Rend. Circ. mat. Palermo 63, 121—175 (1941).

Die vom Verf. früher [Atti Guidonia Nr 7, 105—120 (1939)] angegebene Transformation der Differentialgleichungen der laminaren kompressiblen Grenzschicht gestattet für den Spezialfall der ebenen, nichtangestellten Platte bei beliebiger Prandtl'scher Zahl σ diese auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückzuführen. Diese Differentialgleichungen werden numerisch integriert, wobei die Zähigkeit proportional einer Potenz der Temperatur angesetzt wird. Besonders leicht integriert sich der Fall linearer Temperaturabhängigkeit — hier kann das Gleichungssystem auf das der inkompressiblen Strömung transformiert werden. Über die Abhängigkeit der Schubspannung und der Temperatur an der Platte von der Prandtl'schen Zahl unter verschiedenen Annahmen für den Wärmeübergang geben zahlreiche Diagramme und Tabellen Aufschluß. Auch werden für Luft ($\sigma = 0,725$) Näherungsformeln für den Reibungsbeiwert und das Verhältnis der abgeführten Wärme zur Schubspannung angegeben. *A. Busemann (Braunschweig).*

Schmidt, Wilhelm: Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. 1. Z. angew. Math. Mech. 21, 265—278 (1941).

Wenn die Luft durch eine Wärmequelle geheizt wird, so erzeugt das Temperaturgefälle Dichteunterschiede, die eine turbulente Strömung hervorrufen können. Temperatur- und Dichteunterschiede setzt der Verf. als klein voraus. Das ebene Problem der Berechnung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes liegt beispielsweise dann vor, wenn die Luft längs einer horizontalen Geraden geheizt wird. Der Verf. benutzt in diesem Falle für den Impuls- und Wärmeaustausch erstens den Prandtlschen Mischungswegansatz; zweitens den Taylorschen Wirbeltransportansatz, demzufolge der Mischungsweg in dem Ausdruck für den Wärmeaustausch nicht mehr wie nach Prandtl gleich dem Mischungsweg für den Impulsaustausch ist, sondern das $\sqrt{2}$ -fache. Entsprechend wie bei anderen Problemen turbulenter Strahlausbreitung kann man die Geschwindigkeitsprofile senkrecht zur Hauptströmungsrichtung einander ähnlich ansetzen, was sich auch auf die Temperaturprofile übertragen läßt. Die resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme für die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile werden näherungsweise durch Reihenentwickelungen gelöst. Es ergibt sich, daß nach Prandtl die Temperatur von der Mitte des Strahls nach außen etwas stärker abklingt als die Geschwindigkeit, während nach Taylor gerade das Umgekehrte der Fall ist. Die Entscheidung zwischen beiden Theorien könnte nur durch das Experiment erbracht werden.

W. Tollmien (Dresden)._o

Schmidt, Wilhelm: Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. 2. Z. angew. Math. Mech. 21, 351—363 (1941).

Im zweiten Teil seiner Abhandlung behandelt der Verf. ein rotationssymmetrisches Problem der Berechnung eines turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes, bei dem die Luft über einer kreisförmigen Wärmequelle aufsteigt. Für den Impuls- und Wärmeaustausch wird diesmal nur der Prandtlsche Mischungswegansatz benutzt. Berechnung der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile verläuft ähnlich wie im ebenen Fall. — Zum Vergleich mit der Theorie wird über einer in eine horizontale Tischplatte eingebauten Heizspirale das Geschwindigkeitsfeld mittels einer Zweidrahtsonde nach Reichardt und das Temperaturfeld mittels eines Thermoelements ausgemessen. Die Abnahme der Geschwindigkeit und der Temperatur in der Strahlmitte mit wachsender Entfernungen von der Wärmequelle ergibt sich in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile senkrecht zur Hauptströmungsrichtung fallen dagegen wenig günstig aus.

W. Tollmien (Dresden)._o

Vasilescu, Florin: Recherches théoriques sur les écoulements aérodynamiques à trois dimensions. J. Math. pures appl. IX. s. 21, 155—198 (1942).

L'aut. donne un exposé d'ensemble de ses essais en vue de résoudre le problème du sillage de Helmholtz ou bien celui des jets dans le cas des mouvements liquides de révolution autour d'un axe Oz , qui sont en outre permanents et irrotationnels. — Soit r la distance d'une particule fluide à l'axe; nous désignerons par $\varphi(z, r)$ et $\psi(z, r)$ le potentiel des vitesses et la fonction de courant de Stokes définissant l'écoulement dans un plan méridien zOr . Soient encore u et v les projections de la vitesse V sur les axes Oz et Or et θ l'angle qu'elle fait avec Oz . On sait alors que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = V \cos \theta, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = V \sin \theta$$

et l'on en déduit aisément

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

ou bien, si l'on considère comme inconnues V et θ ,

$$(1) \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \sin^2 \theta.$$

Cela posé, les conditions aux limites du problème sont: $\psi = \text{const}$ sur les parois solides

données et les lignes de jet inconnues (λ); sur ces dernières on doit avoir de plus $V = \text{const.}$ Par analogie avec le cas du mouvement plan, l'auteur est conduit à prendre comme point de départ le système (1) qui donne facilement le long d'une ligne de courant

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds} = -\frac{d\theta}{dn} - \frac{1}{r} \sin \theta, \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dn} = \frac{d\theta}{ds},$$

ds étant l'élément d'arc et dn celui de la normale faisant avec le premier l'angle $+\frac{\pi}{2}$. En particulier, sur une ligne (λ) de discontinuité des vitesses, il viendra

$$(2) \quad \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{r} \sin \theta = -\frac{r'}{r} \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}, \quad V = \text{const.}, \quad \left(r' = \frac{dr}{dz}\right),$$

alors que la condition analogue pour le mouvement plan est $\frac{d\theta}{dn} = 0$. Le problème à résoudre revient donc à la détermination des fonctions $V(z, r)$ et $\theta(z, r)$ satisfaisant aux équations (1), θ prenant des valeurs données sur les parois solides tandis que sur les lignes de jet (λ) on a les conditions (2). — Dès lors, deux méthodes se présentent à l'auteur en vue de résoudre la question. La première consiste à attacher à l'écoulement considéré un autre à deux dimensions, dépourvu de sens physique, pour lequel sur les lignes (λ) on ait $V = f(z, r, r', r'', \dots)$. Moyennant un choix convenable de f on arrive à ce résultat que les lignes de jet (λ) du mouvement à deux dimensions sont aussi celles du mouvement à trois dimensions. Il reste cependant à déterminer effectivement l'écoulement plan, ce qui semble être un problème très difficile. — C'est pourquoi l'aut. envisage une deuxième méthode, qu'il applique d'abord au problème symétrique du sillage à deux dimensions. Cette méthode, dont il a déjà donné le principe ailleurs [C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1122—1125 (1934)] revient à utiliser la formule de Green

$$(3) \quad \iint_d (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dz d\mathbf{r} + \int_c \left(\Phi \frac{d\Psi}{dn} - \Psi \frac{d\Phi}{dn} \right) ds = 0$$

au domaine d occupé par le fluide en mouvement, cela en vue de se débarrasser jusqu'à un certain point de l'emploi de représentations conformes. En prenant $\Phi \equiv \theta$ et en choisissant pour Ψ l'une quelconque des fonctions harmoniques nulles à l'infini ainsi que sur l'axe de symétrie et sur une portion OP_0 de l'obstacle, qui contienne à son intérieur le point de détachement de (λ), il aboutit à une équation intégrale où figure une certaine intégrale curviligne le long de la ligne inconnue (λ), qu'il faut déterminer. Mais cette méthode conduit à des calculs inextricables même dans le cas d'une lame ou d'un cercle, problèmes que la méthode classique de Levi-Civita et de M. H. Villat permet d'élucider complètement (cf. A. Weinstein, ce Zbl. 6, 372; J. Leray 14, 116; C. Jacob 17, 353). — L'aut. cherche ensuite à étendre ce procédé au cas de l'écoulement avec sillage à trois dimensions, en supposant que l'obstacle soit une sphère. Il applique à cet effet la formule (3) écrite pour trois dimensions, en prenant cette fois $\Phi \equiv \varphi$; quant à Ψ , c'est la solution du problème de Neumann pour l'extérieur de la sphère, correspondant à $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ sur l'hémisphère face au courant et à $\frac{d\Psi}{dn} = \tau$ sur l'autre hémisphère, τ étant une fonction arbitraire de la latitude. Si l'on tient encore compte de ce que l'on a manifestement $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ sur la paroi et sur (λ), tandis que $\frac{d\varphi}{ds} = V = \text{const.}$ sur (λ), la formule de Green conduit, en utilisant le lemme fondamental du calcul des variations, à une équation intégral-différentielle, indépendante de τ , donc de Ψ , qui est d'un type analogue à celui considéré pour les écoulements plans, mais dont l'étude ne semble encore guère abordable. C. Jacob.

Giovannozzi, Renato: Determinazione del fattore di interferenza di gallerie aerodinamiche a contorno misto. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 505—516 (1942).

L'aut. donne l'expression du coefficient d'interférence dans le cas d'une soufflerie

mixte à contour circulaire formé de deux parois rigides séparées par deux portions libres, deux à deux symétriques par rapport au centre, lorsque l'aile, d'envergure finie, est située sur l'un des axes de symétrie de la configuration; on suppose que la répartition de la circulation le long de l'aile soit elliptique. *C. Jacob* (Bucarest).

Pistolesi, E.: *Sull'interferenza di una galleria aerodinamica a contorno misto.* (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 517—523 (1942).

Le contour de la soufflerie étant circulaire et composé de n parois rigides (ω_i) et de n portions libres (λ_i), l'auteur forme l'expression de la vitesse complexe $w(z)$ qui correspond à un doublet à l'origine $z = 0$ et qui fournit une vitesse tangente au contour sur les (ω_i) et normale sur les (λ_i); le potentiel φ correspondant est assujéti à prendre la même valeur constante sur les (λ_i). L'expression du coefficient d'interférence en résulte. — Divers cas particuliers de symétrie concernant les (ω_i) et les (λ_i) sont ensuite examinés. *C. Jacob* (Bucarest).

Sauer, R.: *Überschallströmung um beliebig geformte Geschoßspitzen unter kleinem Anstellwinkel.* Luftf.-Forschg. 19, 148—152 (1942).

Das Prandtl-Busemannsche Charakteristikenverfahren für ebene Potentialströmung ist in letzter Zeit mehrfach [z. B. Ferrari, *Aerotecnica* 16, 121—130 (1936)] auf achsensymmetrische Probleme erweitert worden. Dies ist die Voraussetzung für einen weiteren Schritt, durch den es dem Verf. gelingt, gewisse Nachbarlösungen zu den achsensymmetrischen Strömungen anzugeben. Unter ihnen befindet sich als wichtigste Anwendung die Strömung um eine infinitesimal angestellte Geschoßspitze. Führt man Zylinderkoordinaten r, x, ω ein und bezeichnet mit Φ das Potential für die Strömung um den angestellten Körper, mit φ das (als bekannt betrachtete) Potential der achsensymmetrischen Strömung, so führt ein Ansatz

$$\Phi(x, r, \omega) = \varphi(x, r) + \varepsilon(x, r) \cos \omega$$

auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für ε , die nur von x und r abhängt und dieselben Charakteristiken besitzt wie die ursprüngliche achsensymmetrische Strömung. Solche Gleichungen lassen sich numerisch integrieren. Das Verfahren wird auf die Strömung um einen schwach angestellten Kegel angewendet. *A. Busemann.*

Heinrich, G.: *Über Strömungen von Schäumen.* Z. angew. Math. Mech. 22, 117—118 (1942).

Für innige Gemische einer nichtzusammendrückbaren Flüssigkeit und eines idealen Gases (Schäume) werden Zustandsgleichung, Bewegungsgleichungen, 1. Hauptsatz und Adiabatangleichung aufgestellt. Die im Gegensatz zu idealen Gasen jetzt auch druckabhängige Schallgeschwindigkeit hat als Funktion des Mischungsverhältnisses von Flüssigkeit und Gas bei konstantem Druck und konstanter Temperatur ein Minimum. Es tritt dies etwa dann ein, wenn Gas und Flüssigkeit je das halbe Volumen eines Elementes ausmachen und ist nur ein Bruchteil der Schallgeschwindigkeit der gasförmigen Komponente. *A. Busemann* (Braunschweig).

Unwin, J. J.: *The production of waves by the sudden release of spherical distribution of compressed air in the atmosphere.* Proc. roy. Soc., Lond. A 178, 153—170 (1941).

Die Arbeit bringt ein Differenzenverfahren für die numerische Lösung des Problems kugelliger Wellenausbreitung, bei der man jeweils die Zustandsänderungen der einzelnen Gasteilchen verfolgt. Ein Beispiel wird durchgerechnet und zeigt fühlbare Unterschiede gegenüber den Aussagen der Akustik und dem Verhalten eindimensionaler ebener Ausbreitungsvorgänge. *A. Busemann* (Braunschweig).

Ott, H.: *Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effekte 2. Ordnung.* Ann. Physik, V. F. 41, 443—466 (1942).

„Es wird die Reflexion und Brechung von Kugelwellen (Knallwellen oder elektromagnetische Signale) an der ebenen Grenzfläche zweier homogener Medien unter Berücksichtigung scharfer Wellenimpulse mit und ohne Dispersion untersucht, wobei

die Strahlenquelle in der Grenzfläche oder auch in größerem Abstand davon liegen darf. Außer der gewöhnlichen reflektierten und gebrochenen Kugelwelle werden weitere Wellen („Flankenwellen“) gefunden, die mit Beobachtungen von O. v. Schmidt [Physik. Z. **39**, 868 (1938)] in Einklang stehen.“ — Die mathematische Behandlung des Problems besteht in einer Diskussion der Integraldarstellungen der Potentiale Π_r und Π_g der reflektierten bzw. gebrochenen Welle mit Hilfe der Sattelpunktmethode unter Berücksichtigung der je nach Größe der auftretenden Materialkonstanten γ und n verschiedenen Lage der Singularitäten, denen der Integrationsweg C ausweichen muß. Es ist dabei C ein Weg in der komplexen ϑ -Ebene, der die Punkte $-\frac{\pi}{2} + i\infty$ und $\frac{\pi}{2} - i\infty$ verbindet, und es ist

$$\Pi_r = \frac{ik}{2} \int_C H_0^1(kr \sin \vartheta) e^{ik(z+h) \cos \vartheta} f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (z > 0)$$

$$\Pi_g = \frac{ik}{2} \int_C H_0^1(kr \sin \vartheta) e^{-ikz \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} + ikh \cos \vartheta} g(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (z < 0)$$

worin H_0^1 die erste Hankelsche Funktion vom Index Null bedeutet,

$$g(\vartheta) = \frac{2 \cos \vartheta}{\gamma \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}, \quad f(\vartheta) = \frac{\gamma \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{\gamma \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}$$

gesetzt ist, k eine von der Frequenz der Strahlung und der Phasengeschwindigkeit bzw. den Brechungsindizes der Wellen abhängige Konstante ist und z und r Zylinderkoordinaten sind (z = Koordinate auf der Zylinderachse, r = Abstand von der Achse). Die Strahlungsquelle hat dann die Koordinaten $r = 0$, $z = h$; die Ebene $z = 0$ ist Trennfläche der beiden Medien. Bei optischen Wellen ist $\gamma = n^2$; in der Akustik ist γ gleich dem Dichteverhältnis der beiden Medien. W. Magnus (Berlin).

Scheubel, F. N.: Der Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre auf die Längsbewegung des Flugzeugs. Luftf.-Forschg. **19**, 132—136 (1942).

In der Arbeit wird erstmalig nachgewiesen, daß die innerhalb einer Flugbahnschwingung eintretende Änderung der Luftdichte ρ mit der Flughöhe h einen beachtenswerten Einfluß haben kann. Aus dem polytropischen Zusammenhang zwischen ρ und dem Luftdruck p , also $p = \rho^n \cdot \text{Konst.}$, ergibt sich zunächst $\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{n} \frac{\rho}{p} = \frac{\kappa}{n} \frac{1}{a^2}$ ($\kappa = 1,41$ Adiabatenexponent, a = Schallgeschwindigkeit); da nun der Dichtegradient in der Form $\frac{v^2}{2g} \frac{d\rho}{dh}$ (v = Fluggeschwindigkeit) in den Kraftgleichungen auftritt, so erscheint wegen $\frac{dp}{dh} = -\rho g$ als neuer charakteristischer Parameter der Ausdruck $\frac{\kappa}{n} \frac{v^2}{a^2}$. Die Größe $n = 1 : \left(1 + R \frac{dT}{dh}\right)$, wobei R die Gaskonstante, T die Temperatur der Atmosphäre ist, kann von 1,41 (bei adiabatischer Luftschichtung mit $\frac{dT}{dh} = -0,01^\circ/\text{m}$) unschwer auf Werte von 0,775 fallen (bei Inversionsschichten mit $\frac{dT}{dh} = +0,01^\circ/\text{m}$, wie sie selbst in größeren Höhen auftreten); im Winter kann in Inversionsschichten in Bodennähe n bis auf 0,4 fallen ($\frac{dT}{dh} = +0,05^\circ/\text{m}$). Die Bedeutung des Dichtegradienten tritt bereits bei der Berechnung der Bahnfrequenz ω eines Flugzeuges mit sehr hoher statischer Stabilität hervor; da für den genannten Fall der Phygoide eine einfache Energiebetrachtung $\omega = \frac{g}{v} \sqrt{2 + \frac{\kappa}{n} \frac{v^2}{a^2}}$ ergibt, kann bei höheren Machschen Zahlen v/a der Einfluß des Dichtegradienten nicht mehr vernachlässigt werden. In einer physikalischen Betrachtung wird gezeigt, daß dieser Einfluß immer frequenz-erhöhend wirken muß. Anschließend werden die Störungsgleichungen der Flugbahnbewegung unter Berücksichtigung des Dichtegradienten aufgestellt, wobei auch ein

mit ρ veränderlicher Schubbeiwert c_s angenommen wird; außerdem wird der Widerstandsbeiwert c_w , der Auftriebsbeiwert c_a sowie c_s als Funktion von v angesehen; der stationäre Flug wird hierbei als waagrecht verlaufend vorausgesetzt. Die Untersuchung führt auf eine Frequenzgleichung 5. Grades, deren absolutes Glied den Parameter $\frac{\kappa}{n} \frac{v^2}{a^2}$ als Faktor enthält. Bei genügend hoher statischer Stabilität kann die quadratische Gleichung der Anstellwinkelschwingung abgespalten werden, die von dem Dichtegradienten in weiten Grenzen unbeeinflusst bleibt. Die übrigbleibende kubische Frequenzgleichung, deren Koeffizienten und Routhsche Diskriminante bei üblichen Triebwerken positiv sind, besitzt immer eine negative reelle Wurzel; diese ist annähernd $\frac{\kappa}{n} \frac{v^2}{a^2}$ verhältig; ihr Betrag kann in Inversionsschichten bis zu 3,5 mal größer sein als bei adiabatischer Schichtung. Das zusätzliche Auftreten dieses abklingenden Bewegungsanteiles wirkt aber auf die Flugbahnschwingung entdämpfend; die Bahnschwingungsdämpfung wird daher verkleinert bei zunehmenden Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh}$, bei wachsender Fluggeschwindigkeit v und bei einer Triebwerksleistung, die mit der Luftdichte ρ abnimmt. Die Durchrechnung einiger Beispielsgruppen über den Einfluß der Flughöhe H (0 bzw. 6500 m) bei verschiedenen Triebwerkscharakteristiken ($\frac{\partial c_s}{\partial v} = 0$ bzw. $1,333 \frac{c_s}{v}$) und verschiedenen Temperaturgradienten ($\frac{dT}{dh} = -0,0065$ bzw. $+0,05^\circ/\text{m}$) bestätigen die allgemeinen Überlegungen. Auf die entsprechenden Folgerungen für Durchführung und Auswertung von Versuchsflügen wird aufmerksam gemacht.

W. Bader (Adlershof).

Thermodynamik:

Fuchs, Klaus: The vapour-pressure curve. Proc. roy. Soc., Lond. A179, 194—201 (1941).

Die in der Mayersehen Theorie der Kondensation auftretende Zustandssumme für eine Gesamtheit von N aufeinander Kräfte ausübenden Teilchen besitzt Singularitäten für alle Volumina, für die eine Phasenumwandlung eintritt. Dennoch gelingt es dem Verf., sie gerade in der Umgebung solcher Umwandlungsstellen auszuwerten, wobei die Volumänderung bei der Kondensation und der Dampfdruck als Reihen gegeben werden, deren einzelne Glieder die Virialkoeffizienten enthalten und in bestimmter Weise mit der Zustandssumme der kondensierten Phase zusammenhängen. Das erste Glied in der Reihe für den Dampfdruck stimmt dabei mit dem bekannten Ausdruck von Stern für den Dampfdruck überein.

Sauter (München).

Sestini, Giorgio: Sopra un problema di propagazione del calore. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 47—65 (1942).

Die Untersuchung der Erwärmung durch Reibung bei rotierenden Maschinen wird schematisch zurückgeführt auf das Studium der Wärmeausbreitung in einem System, das aus einem Zylinder und einem Mantel, die unbegrenzt und coaxial sind, gebildet wird, unter Einschiebung einer gleichförmigen Schicht von Wärmequellen. Da infolge der Symmetrie die Temperatur eines beliebigen Punktes nur von seiner Entfernung von der Zylinderachse und evtl. von der Zeit abhängt, wird das Problem insbesondere ein ebenes. Verf. berechnet zuerst vollständig den stationären Fall, wobei er der größeren Allgemeinheit wegen auch die Achse des Zylinders als Sitz von Wärmequellen annimmt. Er bestimmt auch den Grenzfall, daß die Schicht der Wärmequellen von unendlich kleiner Dicke ist. Wird unter dieser Voraussetzung die Temperatur der Schicht als bekannt angenommen, so beweist Verf. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im nichtstationären Fall.

Dario Graffi (Bologna).

Elektrodynamik:

Ledinegg, E.: Über die allgemeinste Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in abgeschlossenen zylindrischen Räumen. Ann. Physik, V. F. 41, 537—566 (1942).

An Hand einer von Bromwich angegebenen Methode wird gezeigt, daß sich für

abgeschlossene zylindrische Räume von einfachem Zusammenhang das allgemeinste elektromagnetische Feld stets aus der Überlagerung zweier besonderer Felder gewinnen läßt, von denen das eine in einer ausgezeichneten Richtung nur eine elektrische Feldkomponente, das andere in derselben Richtung nur eine magnetische Feldkomponente besitzt. Jedes dieser beiden Felder ist ableitbar aus einer einzigen skalaren Größe, die sich als die einzige, nicht verschwindende Komponente des Vektorpotentials auffassen läßt. Auf den Zusammenhang dieses Ergebnisses mit der längst bekannten Möglichkeit, jedes elektromagnetische Feld entweder aus einem Hertzschen Vektor oder aus einem Fitzgeraldschen Vektor oder aus beiden zugleich abzuleiten, geht der Verf. leider nicht ein. Auch hätte nicht unerwähnt bleiben dürfen, daß in dem allgemeineren Falle eines von den Orthogonalflächen der Kugelkoordinaten begrenzten Raumes, von dem der zylindrische Raum nur einen Grenzfall darstellt, die gleiche Möglichkeit ebenfalls schon seit langem erkannt worden ist. *H. Buchholz* (Berlin).

Verschaffelt, J.-E.: Anwendung der Thermodynamik auf elektrische Ströme. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 631—649 (1941) [Holländisch].

Bei einer Anwendung der Thermodynamik auf stationäre Flüssigkeitsströmungen kam Verf. zum Schluß, daß das gleiche Verfahren auch auf elektrische Ströme anwendbar ist, falls man diese als Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit auffaßt. Für einen isotropen Leiter stellt Verf. lineare Beziehungen auf zwischen der Stromdichte, dem Energieströmungsvektor und einem Vektor, dessen Divergenz einer Leistung entspricht, welche der Wechselwirkung zwischen dem Leiter und der Elektronenströmung entstammt. Zur Anwendung des zweiten Hauptsatzes verwendet Verf. die Beziehung, daß die Entropie des betrachteten Volumelementes sich nicht ändert. Verf. gelangt hierdurch zu Formeln, welche die mit dem Strom umkehrbaren elektromotorischen und galvanokalorischen Effekte in Leitern bestimmen. Es zeigt sich, daß diese Effekte nur in nichthomogenen Leitern auftreten, und Verf. gelangt zu Ausdrücken für die Thomson- und Peltiereffekte. Für inhomogene Leiter führt er Tensorgleichungen ein, welche die genannten Effekte in Abhängigkeit der verschiedenen anisotropen Eigenschaften ausdrücken. Diese Gleichungen werden im einzelnen diskutiert.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Dällenbach, W.: Berichtigung zu der Arbeit: „Der Reziprozitätssatz des elektromagnetischen Feldes“ in Heft 3 (1942) S. 153. Arch. Elektrotechn. 36, 572 (1942).

Hinweis darauf, daß in der angeführten Arbeit (dies. Zbl. 27, 32) bei der Berechnung des Integrals $\int_{F^{(1)}} (\mathfrak{R}, d\mathfrak{f})$ für den Hohlraumleiter, Bild 4, S. 157, der Faktor $1/2 \pi$ verlorengegangen ist.

Glaser (Prag).

Slater, J. C.: Note on the effect of pressure on the Curie point of iron-nickel alloys. Phys. Rev., II. s. 58, 54—56 (1940).

Zur Beantwortung der Frage, ob das Erdinnere trotz der hohen Temperatur ($\sim 5000^\circ$) infolge des hohen Druckes ($\sim 10^6$ Atmosphären) vielleicht doch ferromagnetisch sein könnte, untersucht Verf. theoretisch die Druckabhängigkeit des Curiepunktes bei den Eisen-Nickel-Legierungen. Dazu betrachtet er den Übergang vom ferromagnetischen Zustand in den paramagnetischen, der eigentlich eine Phasenumwandlung zweiter Art ist, als eine solche erster Art zwischen dem bis zur Sättigung magnetisierten Medium und dem unmagnetischen unter Vernachlässigung des kontinuierlichen Überganges zwischen diesen beiden Zuständen und wendet darauf die (Clausius-) Clapeyronsche Gleichung an; dabei wird die Änderung der Entropie mit dem Volumen am Umwandlungspunkt einerseits aus der Anomalie der spezifischen Wärme am Curiepunkt, andererseits aus Rechnungen von Shockley bzw. Bozorth entnommen. Es ergibt sich für Ni eine Erhöhung des Curiepunktes mit dem Druck, bei Fe eine Erniedrigung, für eine Legierung mit 70% Ni ein druckunabhängiger Curiepunkt. Doch betragen die Absolutwerte dieser Druckabhängigkeiten bestenfalls 1% derjenigen, die zur ferromagnetischen Deutung des Erdmagnetismus notwendig wäre. *Sauter*.

Inglis, D. R., and E. Teller: On a proposed thermoelectric origin of the earth's magnetism, *Phys. Rev.*, II. s. **57**, 1154—1155 (1940).

Nach einer Hypothese von Elsasser (dies. Zbl. **20**, 271) sollte der Erdmagnetismus durch thermoelektrische Ströme erzeugt werden, wobei das sie bedingende Temperaturgefälle durch materielle Konvektionsströme in Verbindung mit der Corioliskraft infolge der Erdrotation aufrechterhalten werden soll. Aus dem bekannten Wärmestrom durch die Erdkruste leiten aber die Verf. obere Schranken für die möglichen Stromgeschwindigkeiten und die Corioliskraft ab, die nur ein Millionstel der von Elsasser benötigten Werte betragen.

Sauter (München).

Vellat, T.: Beitrag zur Theorie der Seitenbänder bei Frequenzmodulation. *Elektr. Nachr.-Techn.* **18**, 149—155 (1941).

Im Gegensatz zur Anodenmodulation können bei der Frequenzmodulation unsymmetrische Seitenbänder in der Amplitude auftreten. Dies wird theoretisch begründet. Wenn die Modulationsfunktionen radialsymmetrisch aufgebaut sind, ergeben sich auch bei der Frequenzmodulation symmetrische Seitenbänderspektren.

Ernst Müller (Berlin).

Optik:

Plummer, H. C.: The Cassegrain telescope as a thick lens. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **101**, 345—348 (1941).

Der Verf. bestimmt zunächst den Ort des optischen Mittelpunktes C , indem er die Endpunkte zweier paralleler Halbmesser von Haupt- und Fangspiegel miteinander verbindet. Nennt man die Halbmesser r_1 und r_2 , die Scheitel S_1 und S_2 , $S_1S_2 = d$ (Bezeichnung des Normblatts DIN 1335; streng genommen sind danach r_1, r_2, d negativ), so wird $S_1C = \frac{r_1d}{r_1 - r_2}$, $S_2C = \frac{r_2d}{r_1 - r_2}$. Durch Anwendung der Spiegelformel bekommt man die Örter der beiden Knotenpunkte $S_1K = \frac{r_1d}{2d - r_1 + r_2}$, $S_2K' = \frac{r_2d}{2d - r_1 + r_2}$, die gleichzeitig die Hauptpunkte sind. Die Abbildung eines beliebigen Dingpunktes liefert mit einer leichten Elimination die Brennweite $f' = \frac{r_1r_2}{2(2d - r_1 + r_2)}$ und die eines unendlich fernen Dingpunktes die Lage des Bildbrennpunktes $S_2F' = -\frac{r_2(2d - r_1)}{2(2d - r_1 + r_2)}$. Ebenso ist der (praktisch bedeutungslose) Dingbrennpunkt zu bestimmen $S_1F = \frac{r_1(2d + r_2)}{2(2d - r_1 + r_2)}$. An zwei Beispielen zeigt der Verf., wie völlig verschieden die Grundpunkte zueinander liegen können, je nachdem $r_2 \geq r_1$ ist.

Hans Boegehold (Jena).

Picht, Johannes: Bemerkung zu den Fundamentalgleichungen des Winkeleikonals. *Z. Instrumentenkd.* **62**, 282—285 (1942).

Die Bemerkung bezieht sich auf eine Arbeit von M. Berek, die der Verf. in dies. Zbl. **26**, 30—31 besprochen hat und ist eine weitere Ausführung der Bemerkung, daß die formale Vereinfachung der Grundgleichungen des Winkeleikonals möglich ist, ohne daß man die Invarianz gegen die Änderung der Lage der Aufpunkte zu opfern braucht. Man benutzt dort die Schnittpunkte der Strahlen mit den achsensenkrechten Ebenen, von deren Achsenschnittpunkten aus die Lote auf den Strahl gefällt sind. — Verf. geht auf seine Einführung in die Theorie der Elektronenoptik (vgl. dies. Zbl. **22**, 37) zurück, führt die (bei inhomogenen anisotropen Mitteln geltenden) Gleichungen des Normaleneikonals an und zeigt, wie diese in der Strahlenoptik in die Gleichungen des Winkeleikonals übergehen und wie hier formale Vereinfachung und Invarianz zu vereinigen sind. Allgemein gilt dies nicht, auch nicht, wenn das Anfangs- oder das Endmittel isotrop, aber nicht homogen ist (weil die Strahlen keine Geraden sind), oder homogen, nicht isotrop (weil die Normale, für die das Eikonal gilt, nicht mit dem geradlinigen Strahl zusammenfällt). Für die zwischenliegenden Mittel sind aber keine Voraussetzungen nötig. — Endlich weist Verf. — sich auf sein Buch beziehend —

darauf hin, daß man durch einen Kunstgriff den allgemeinen Fall für Untersuchungen über Zerstreuungsfikuren auf den Sonderfall des homogenen isotropen Mittels zurückführen könne.

Hans Boegehold (Jena).

Korff, Günther: Totalundeutlichkeit und Seidelsche Theorie. Z. Instrumentenkd. 62, 285—290 (1942).

Die Arbeit ist die Fortsetzung einer früheren (vgl. dies. Zbl. 25, 281). Der Ausdruck für die Totalundeutlichkeit hat (unter Weglassung eines unwesentlichen Faktors

und mit einer zulässigen Vernachlässigung) die Form $U = \int_0^r (e - z)^2 h^3 dh$ (h Einfalls-

höhe, z Längsabweichung eines Strahls, r halbe Öffnung, e Abstand der Einstellebene von der Gaußischen Bildebene). Bei Beschränkung auf das erste (Seidelsche) Glied ist $z = a_1 h^2$. — Es sind nun zwei Aufgaben zu lösen: 1. bei gegebener Abweichung

die günstigste Einstellung zu finden. Die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial e} = 0$ führt allgemein zu

$e = \frac{4}{3} \int_0^r z h^3 dh$, bei Beschränkung auf das erste Glied zu den bekannten Formeln

$e = \frac{2}{3} r^2 a_1$; $U_E = \frac{1}{72} r^8 a_1^2$; 2. die Bestimmung solcher Halbmesser usw., die nun U_E

zum Minimum machen. Im Seidelschen Falle ist $\delta U_E = 0$ für $a_1 = 0$ und für $\delta a_1 = 0$. Verf. untersucht die zweite Bedingung für den Fall eines zweilinsigen Objektivs, indem er die zweite Seidelsche Summe zum Verschwinden bringt, stellt also die Bedingungen 1. $\delta \Sigma A = 0$, 2. $\Sigma B = 0$, und zwar, indem er a) die Brechkräfte F_1, F_2 als (etwa durch die Farbenhebung) gegeben annimmt; b) indem er annimmt, daß sie zur Verfügung stehen, und etwa v_1, v_2 nachher bestimmt werden. — Als Optima können diese Objektive freilich wohl nur bezeichnet werden, wenn $a_1 = 0$ unmöglich ist, andernfalls sind es eher Pessima. — Auf den Gaußischen Grundsatz komme man, wenn man statt der Bedingung $\Sigma B = 0$ verlangte $a_2 = \text{konst.}$, das gebe aber keine besondere Güte der Abbildung, während $\Sigma B = 0$ die Beseitigung eines Abbildungsfehlers bedeute.

Hans Boegehold (Jena).

Relativitätstheorie:

Gomes, Ruy Luis: Les changements de référentiel et la cinématique des ensembles de points, problèmes, qui en dépendent. J. Phys. Radium, VIII. s. 1, 335—340 (1940).

Versteht man unter der „Konfiguration“ eines Systems materieller Punkte den Inbegriff ihrer gleichzeitigen Lagen, so folgt — da die Gleichzeitigkeit ein relativer Begriff ist —, daß die Konfiguration eines Punktsystems nur in bezug auf ein bestimmtes Bezugssystem definiert ist. Transformiert man also mittels Lorentz-Transformation die Konfiguration in einem System R auf ein dazu bewegtes System R' , so erhält man im allgemeinen keine Konfiguration, d. h. den Inbegriff von gleichzeitigen Lagen im System R' . Verf. stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, wie sich die Punkte in R bewegen müssen, damit jede Konfiguration im ersten System durch die Lorentz-Transformation wieder in eine Konfiguration im neuen Bezugssystem übergeht. Es werden folgende spezielle Lösungen behandelt: Die Punkte liegen in R auf einer Fläche Σ und die Fläche Σ' , in welche diese im zweiten System übergeht, soll eine gleichzeitige Lage der Punkte darstellen. Es müssen dann zwischen den Flächennormalen $n \equiv p, q, r$ und $n' \equiv p', q', r'$ von Σ und Σ' die Beziehungen bestehen:

$$p': q': r' = [p - v/c^2 (n \mathfrak{B})] / \sqrt{1 - v^2/c^2} : q : r.$$

Hierbei ist v die Geschwindigkeit von R' gegenüber R in der x -Richtung und \mathfrak{B} die Geschwindigkeit der Punkte in R . Identifiziert man Σ und Σ' mit den Wellenfronten einer von R und R' aus betrachteten Welle, so enthalten die angeführten Formeln die für die Aberration des Lichtes. Verlangt man, daß die betrachteten Flächen Ebenen sind, die sich zu sich selbst parallel verschieben, so muß die Komponente der Geschwindigkeit \mathfrak{B} in Richtung der Ebenennormale konstant sein. Da die Lage des Schwer-

punktes eine durch die Konfiguration bestimmte Größe ist, kann diese sowohl im System R wie auch aus der entsprechenden Konfiguration in R' berechnet werden. Bezeichnet man diese mit \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' , so kann man unter dem Schwerpunkt R' auch den Punkt \mathfrak{M}' verstehen, welcher durch eine Lorentz-Transformation aus \mathfrak{M} hervorgeht. Verf. untersucht nun, wann \mathfrak{M}' mit \mathfrak{M} zusammenfällt, wie sich diese Schwerpunkte bewegen und insbesondere, wann die Bewegung von \mathfrak{M}' geradlinig und gleichförmig erfolgt.

W. Glaser (Prag).

Randers, Gunnar: On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. Phys. Rev., II. s. **59**, 195—199 (1941).

Die Riemannsche Geometrie ist dadurch gekennzeichnet, daß affiner Zusammenhang und Metrik durch denselben Tensor beschrieben werden. Grundsätzlich sind beide jedoch unabhängig. Unter Beibehaltung des Riemannschen Ansatzes für den affinen Zusammenhang diskutiert Verf. das exzentrische Linienelement $ds = [k_\mu dx^\mu + \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}]$ ($g_{\mu\nu}$ Riemannscher Fundamentaltensor, k_μ der die Exzentrizität der Metrik bestimmende Vierervektor). — Ergebnisse: 1. „Eich“-Transformation des Vektors k_μ läßt die extremalen Bahnen invariant. 2. Linienelemente raumartiger Vektoren sind gegen Richtungsumkehr invariant, solche zeitartiger nicht (Auszeichnung der Zeitrichtung). 3. Die Gleichungen für die extremalen Bahnen stimmen formal mit denen eines Elektrons in einem elektromagnetischen und gravitierenden Feld überein. 4. Zu denselben Anfangsbedingungen gehören zwei Bahnen, die der Bewegung positiver und negativer Teilchen entsprechen. 5. Die Geometrie des Verf. kann man auffassen als Projektion der Nullvektoren eines Riemannschen R_5 in einen R_4 . — Sei γ_{mn} der Fundamentaltensor des R_5 , G_{mn} der daraus gebildete verjüngte Anteil des Krümmungstensors, so führt die Forderung, daß die Abbildung $B^m = G^m_n A^n$ Nullvektoren in ebensolche überführe, zu der Bedingung $G_{nl} G^l_n = \theta \cdot \gamma_{lq}$ [$\theta = \text{Fkt}(x)$], mit der z. B. die Feldgleichungen $G^{mn} = \alpha \cdot \gamma^{mn}$ ($\alpha = \text{konst.}$) verträglich sind, in vierdimensionaler Schreibweise: $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \frac{1}{2} E^{\mu\nu} = \alpha g^{\mu\nu}$, $F^{\nu\alpha}_{;\alpha} = 0$ ($R_{\mu\nu}$ Riemannscher Krümmungstensor, $E_{\mu\nu}$ elektromagnetischer Spannungstensor). Auch andere Ansätze für die Feldgleichungen werden erwogen.

F. Bopp.

Kosambi, D. D.: Path-equations admitting the Lorentz group. J. London Math. Soc. **15**, 86—91 (1940).

The philosophy of light signalling does not in itself imply the existence of any sort of a metric; it is sufficient to be able to observe the paths of trajectories of all particles. These paths are taken as the solutions of a system of second order differential equations $\ddot{x}^j + d^j(x, \dot{x}) = 0$. The author proves that the most general path-equations admitting the Lorentz group and the translations are $\ddot{x}^i + H \dot{x}^i = 0$, where H is a function of $\sum (\dot{x}^i)^2$. If above the equations are invariant under the group $x^i = ax^i$, H has to be a constant. The first case represents Milne's expanding universe, the second case Einstein's space for special relativity. Furthermore it is shown that the most general path equations derivable from three-dimensional observations (three-dimensional differential equations) and admitting the Lorentz group together with the group $x^i = ax^i$ are

$$\ddot{x}^i - x^i G(\xi \frac{B}{A} + 2\dot{x}^i \frac{C}{A} \gamma(\xi)) = 0; \quad A = \sum (x^i)^2, \quad B = \sum (\dot{x}^i)^2, \quad C = \sum (x^i \dot{x}^i), \quad \xi = \frac{C^2}{AB}.$$

These spaces are essentially those obtained by Milne, except that γ is arbitrary. The author investigates the case that a metric exists, which restricts the choice of G and γ .

J. Haantjes (Amsterdam).

Roubaud-Valette, Jean: La transformation de Lorentz et la mécanique ondulatoire. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 563—566 (1941).

Anwendung der Lorentztransformation auf die skalare und spinorielle Wellenfunktion eines Teilchens. Als bewegtes Bezugssystem wird ein — leider nicht genauer definiertes — System betrachtet, an das das Teilchen „gebunden“ sein soll. S. Tiferica.

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

● Métadier, Jacques: La théorie de l'agitation chaotique. Mouvement brownien, agitation moléculaire, dispersion, flocculation, etc.... Préface de Louis de Broglie. (Actualités scient. et industr. Nr. 661. Exposés de physique théorique. Publiés par Louis de Broglie. XXIV.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 71 pag. frs 25.—.

Die Theorie der ungeordneten Bewegungen wird im wesentlichen mit Hilfe einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit p eines Teilchens an einer Stelle behandelt, für die eine Gleichung

$$\dot{p} = Hp$$

aufgestellt wird, wo H ein Operator ist. Nach Betrachtung einiger einfacher Fälle veranlaßt die Ähnlichkeit mit der nichtrelativistischen Wellengleichung der Materie zu sehr allgemeinen und abstrakten Betrachtungen über Veränderungen von Systemen in abstrakten Räumen und die zweite Quantelung. F. Hund (Leipzig).

Kristallbau und fester Körper:

Fürth, R.: The stability of crystal lattices. 5. Experimental evidence on recent theories of the equation of state and the melting of solids. Proc. Cambridge Philos. Soc. **37**, 34—54 (1941).

Es werden zahlreiche empirische und halbempirische Formeln über die thermischen und elastischen Konstanten fester Körper zusammengestellt, ihr Zusammenhang mit der Bornschen Gittertheorie diskutiert und mehrere Tabellen zum Vergleich zwischen Theorie und Experiment gegeben. Im besonderen werden der Verlauf der Schmelzkurve, der Zusammenhang zwischen Schmelzen und Brechen eines Gitters, die Schmelz- und Sublimationswärme sowie die elastischen Konstanten untersucht. Sauter (München).

Falkenhagen, H.: Ordnungszustand in flüssigen elektrolytischen Lösungen. Physik. Z. **43**, 170—190 (1942).

Verf. stellt zunächst die neueren Ergebnisse der Elektrolytforschung im Zusammenhang mit der interionischen Theorie von einem einheitlichen Standpunkt dar, wobei nur die gesicherten experimentellen Meßresultate herangezogen werden. Dabei ergibt sich folgendes: Der Ordnungszustand der Ionen, der sich durch das Bild der Ionenwolken beschreiben läßt, reicht für alle Grenzesetze auf dem Gebiete der Thermodynamik und dem der irreversiblen Erscheinungen der Leitfähigkeit, Diffusion und Viskosität aus. Diese genaue Kenntnis der quantitativen Gesetze für genügend verdünnte elektrolytische Lösungen ist für die allgemeineren Gesetze der Lösungstheorie von fundamentaler Bedeutung. Nur allein dadurch wird eine systematisch vertiefte Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten der Elektrolytlösungen überhaupt erst möglich. Das Problem der konzentrierteren wässrigen und nichtwässrigen elektrolytischen Lösungen steht erst am Anfang der Erforschung. Der Einfluß der van der Waalsschen Kräfte sowie der Einfluß der echten chemischen Kräfte, ferner der abstoßenden Kräfte zwischen den Ionen sowie der Wechselwirkungskräfte zwischen den Ionen und Lösungsmittelmolekülen bedarf zur Entwicklung einer umfassenden Lösungstheorie einer gründlichen Studie. Die Frage, wie die Ionen den Ordnungszustand der Lösungsmittelmoleküle beeinflussen, ist von großem Interesse. Auch eröffnet die Möglichkeit, vermöge der Absorptionsspektren Näheres über die interionischen Felder in Elektrolytlösungen im Sinne von Tomášek zu erfahren, interessante Forschungsarbeit. Von Interesse scheint auch die Erforschung der Struktur metallischer Elektrolyte zu sein, die einen Übergang von den rein elektrolytischen Leitern zu den metallischen Leitern bilden. — Eine zusammenfassende Studie speziell chemischer Fragen (Aus- und Einsalzeffekt, katalytische Neutralsalzwirkung u. a.) wird in Aussicht gestellt. H. Falkenhagen. °°

Elektronentheorie:

Richter, G.: Zur Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen. *Z. Physik* 119, 406—414 (1942).

Der Verf. leitet für die Energieverteilung der Elektronenemission kalter Metalle bei hohen Feldstärken in der normalen bzw. tangentialen Richtung Formeln ab, die er numerisch unter bestimmten Annahmen auswertet. Er findet, daß die Häufigkeit des Energieanteils parallel zur Oberfläche mit zunehmendem Energiebetrag ε_t exponentiell abnimmt, während die Verteilungsdichte der Energie in der normalen Richtung nach dem ersten Stromeinsatz schnell ansteigt, in einem bestimmten, formelmäßig gegebenen Abstand β ein Maximum vom Betrage $\frac{J_0}{\beta e}$ erreicht, um dann exponentiell abzufallen. J_0 bedeutet dabei den Gesamtstrom der Feldelektronen. Der Streubereich der Energien ist in tangentialer Richtung etwa gleich $\frac{1}{3}$ von dem in normaler Richtung. Diese Halbwertsbreite liegt in der Größenordnung einiger Zehntel eV. Ein Vergleich mit bisher durchgeführten Beobachtungen anderer Autoren zeigt hingegen merkbare Unterschiede. Es ergaben sich dort Halbwertsbreiten von 3 bis 4 eV, ja bis über 10 eV. Der Verf. führt diese experimentellen Ergebnisse auf das Vorhandensein von Fehlerquellen bei den experimentellen Untersuchungen zurück und diskutiert als derartige Fehlerquellen den Einfluß von Feldverzerrungen, und zwar insbesondere eine Störung an der Kathode sowie eine Störung am Beschleunigungsgitter. Er findet, daß bei den bisher vorliegenden Beobachtungen schon die rein geometrisch bedingte Feldverzerrung in der Versuchsanordnung die über Erwarten große Breite der Energieverteilung verursacht haben kann. *Picht* (Neubabelsberg).

Strutt, M. J. O., und A. van der Ziel: Die Folgen einiger Elektronenträgheitseffekte in Elektronenröhren. 1. Theoretische Erläuterungen. *Physica*, Haag 8, 81—108 (1941).

Verff. betrachten eine Mehrgitterelektronenröhre und zeigen, welche Ströme in den verschiedenen Elektrodenleitungen fließen, wenn eine Ladung von der Kathode zur Anode eilt. Auf dieser Grundlage bauen sie dann das Verhalten der betreffenden Ströme auf im Falle periodischer Ladungsimpulse, welche die Kathode verlassen. Hierbei weisen sie auf eine neue Art der Gleichrichterwirkung „Influenzgleichrichtung“ hin, welche z. B. zum Empfang frequenzmodulierter Wellen verwendet werden kann. Als Folge einer veränderlichen Steuergitterspannung entstehen in der Röhre Elektronenströme, welche in den Leitungen verzerrte Bilder des vorgelegten Spannungsverlaufs erzeugen, sobald die Elektronenlaufzeiten gegenüber der Veränderungszeit der Spannung beträchtlich werden. Verff. zeigen, daß durch verschiedene Laufzeiten der einzelnen Elektronen, welche die Röhre durchheilen, eigenartige Stromformen in den Elektrodenleitungen erzeugt werden können, wodurch z. B. Frequenzvervielfachung auftreten kann. Sie gehen dann zu einer einwelligen Gitterwechselspannung kleiner Amplitude über und zeigen, daß in diesem Fall die Verstärkungszahl einer beliebigen Röhre in Kaskadenschaltung dem Modul nach stets größer als $\frac{1}{2}$ sein muß. Für Sekundäremissionsröhren wird hieraus gefolgert, daß sie grundsätzlich bis zu beliebig hohen Frequenzen hinauf in Kaskadenverstärkern hohe Werte der Verstärkungszahl je Stufe zu erzielen gestatten. Als Sonderfall der betrachteten Laufzeitwirkungen behandeln Verff. den aus dem Schrifttum bekannten Induktionseffekt. Sie berechnen sodann einige Phasenwinkel, welche im vorangegangenen Teil der Arbeit auftreten, und zeigen, daß für diese Phasenwinkel bei nicht zu hohen Frequenzen ein „Schwerpunktsatz“ gilt. Zum Schluß weisen Verff. auf eine neue Steuerungsart: die Laufzeitmodellierung hin. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).^{oo}

Strutt, M. J. O., und A. van der Ziel: Die Folgen einiger Elektronenträgheitseffekte in Elektronenröhren. 2. Anwendungen und numerische Ergebnisse. *Physica*, Haag 9, 65—83 (1942).

Verff. gehen davon aus, daß durch die Bewegung von Elektronen in der Nachbarschaft leitender Oberflächen, welche durch Leiter miteinander verbunden sind, in diesen Leitern

Ströme entstehen. Diese Influenzströme wurden bereits im ersten Teil dieser Arbeit für einige Fälle berechnet, und die entsprechenden Formeln werden hier bis zu sehr hohen Frequenzen ausgewertet mit dem Ziel, das Verhalten von Elektronenröhren im Dezimeterwellengebiet zu deuten. Aus den Formeln schließen Verff., daß man die Elektrodensysteme am Ausgang solcher Röhren derart wählen kann, daß die obengenannten Influenzströme bedeutend größer werden als im üblichen Falle. Besonders hohe Influenzströme werden durch Anwendung von Elektronenpendelungen erhalten. Diesen hohen Influenzströmen entsprechen hohe Steilheitswerte der betreffenden Elektronenröhren. Hierauf wenden Verff. sich den Steuerleistungen zu, welche an der Eingangsseite der Elektronenröhren bei diesen hohen Frequenzen erforderlich sind. Sie berechnen, daß die Steilheit des Kathodenstroms im Betrage fast unverändert bleibt, und geben eine Kurve für den Eingangswirkleitwert am Steuergitter unter verschiedenen Betriebsbedingungen bis zu extrem hohen Frequenzen hinauf. Hierauf betrachten sie den Einfluß von Elektronenpendelungen auf diesen Wirkleitwert und schließen, daß durch entsprechende Wahl des Eingangs elektrodensystems günstige Werte der Steuerleistung erzielt werden können. Zum Schluß betrachten sie den Einfluß einer Geschwindigkeits- und Laufzeitstreuung auf die Influenzströme und zeigen, daß durch diese unerwünschten Wirkungen eine beträchtliche Verringerung der erzielten Steilheitswerte auftreten kann. [Physica, Haag 8, 81—108 (1941).]

M. J. O. Strutt (Eindhoven).^{oo}

Strutt, M. J. O., und A. van der Ziel: Methoden zur Kompensierung der Wirkungen verschiedener Arten von Schroteffekt in Elektronenröhren und angeschlossenen Stromkreisen. Physica, Haag 8, 1—22 (1941).

Zu Anfang stellen Verff. einige Regeln für das Rechnen mit Schwankungsströmen und Schwankungsspannungen zusammen. Hierbei wird gezeigt, daß diese Ströme und Spannungen sich bei genügend kleinem Frequenzintervall angenähert wie einwillige Wechselströme und Wechselspannungen verhalten. Dann zählen sie die bisher bekannten Ursachen spontaner Stromschwankungen in Elektronenröhren und angeschlossenen Stromkreisen auf: Schroteffektschwankungen, Stromverteilungsschwankungen, Sekundäremissionsschwankungen und Laufzeitstromschwankungen, welche mit der endlichen Elektronenlaufzeit in Röhren zusammenhängen. Die angegebenen Verfahren zur Verringerung der Stromschwankungen haben als gemeinsame Grundlage eine Art Rückkopplung. Verff. zeigen, welche Rückkopplung zur Verringerung jeder der obengenannten Stromschwankungen effektiv verwendet werden kann. Darauf behandeln sie den Einfluß der genannten Schaltmaßnahmen auf das Verhältnis der effektiven Schwankungsspannung zur Signalspannung am Ausgang eines Verstärkers unter Verwendung von Elektronenröhren der genannten Art. Es zeigt sich, daß dieses Verhältnis in bestimmten Fällen durch Anwendung der behandelten Verfahren verringert werden kann, wodurch der Verstärker bzw. Empfänger rauschfreier arbeitet. Im Anhang geben sie ein Beispiel für die exakte Durchrechnung eines der behandelten Fälle und zeigen, welche Fehler die angenäherte Rechenweise des Textes bedingt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).^{oo}

Guillien, Robert: Variation de la polarisation diélectrique avec la concentration. (Variation der dielektrischen Polarisation mit der Konzentration.) Ann. Phys., Paris 17, 237—264 (1942).

Es seien zwei Partikelarten der Dielektrizitätskonstante ϵ_1 bzw. ϵ_2 in ein Medium eingebettet. Die Teilvolumina, welche die Partikel einnehmen, seien δ_1 bzw. δ_2 . Es sei ferner $\epsilon_1 < \epsilon_2$ und $\delta_1 + \delta_2 = \text{konst.}$ Die entwickelten Formeln beziehen sich auf die Dielektrizitätskonstante ϵ der Mischung in Abhängigkeit von ϵ_1 , ϵ_2 , δ_1 und δ_2 . Wenn E_1 den Wert von ϵ für $\delta_2 = 0$ bedeutet, ergeben die Formeln für $\delta_1 + \delta_2 < 0,5$ in erster Annäherung für $\delta_2 \frac{\epsilon + 2E_1}{\epsilon - E_1}$ eine lineare Funktion von δ_2 ; diese ergibt für blättchenförmige Partikeln ein Anwachsen, für kugelförmige Partikeln eine Abnahme. Die Formeln werden experimentell an Mischungen von Woodscher Legierung und PbCl_2 B einerseits bzw. Magnesiumpartikeln und PbCl_2 -Partikeln in Luft andererseits geprüft. Bedeuten ϵ die Dielektrizitätskonstante eines Flüssigkeitsgemisches, ϵ_1 und ϵ_2 die Dielektrizitätskonstanten seiner Konstituenten und $1 - \delta$ bzw. δ die Volumina der Konstituenten, so ist $\frac{\delta(\epsilon + 2\epsilon_1)}{\epsilon - \epsilon_1}$ bei nicht kugelförmigen Partikeln eine zunehmende

lineare Funktion von δ . Es werden weiter Zusammenhänge dieser Formel mit der Theorie des inneren Feldes erörtert. Dabei spielen auch die geometrische und elektrische Anisotropie des Moleküls eine Rolle. *Falkenhagen (Dresden).*

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Haenzel, G.: Geometrie und Wellenmechanik. 3. Die Elemente auf der Eigenwertfläche und der Kernfläche. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. 52, Abt. 1, 103—117 (1942).

Eine Anzahl übereinander liegender Blätter der komplexen Ebene werden von unten nach oben mit $n_1 = 1, 2, 3, \dots$ numeriert. Vom untersten Blatt wird nur der Einheitskreis K_0 beibehalten; er wird mit seinem Rande an das zweite Blatt geheftet. Das zweite Blatt besteht außer dem Einheitskreis aus einem Kreisring K_1 ($1 \leq |z| \leq 3$) von der Breite 2. Im dritten Blatt kommt noch der Kreisring K_3 ($3 \leq |z| \leq 5$) hinzu, usw. Der Kreisring K_ν wird auf allen Blättern durch die reelle Achse und 2ν weiterer Radien in $2\nu + 1$ gleiche Sektoren geteilt. Auf jeder dieser Radienteilstrecken nehme man den Mittelpunkt $2\nu \exp\left(\frac{2\pi mi}{2\nu + 1}\right)$ oder, wenn man den Spin berücksichtigen will, zwei Punkte in gleicher Entfernung $\frac{1}{2}$ vom Mittelpunkt an. Diese „Eigenwertpunkte“ stellen Zustände eines Elektrons im Zentralfeld mit den Quantenzahlen $n = n_1, n_2 = \nu = l, n_3 = m (= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \nu)$ und $n_4 = \pm \frac{1}{2}$ dar. Jeder Weg auf der „Eigenwertfläche“ von einem Eigenwertpunkt zu einem anderen auf einem tieferen Blatt entspricht einem Energiesprung. Besetzt man die Eigenwertpunkte in einer bestimmten Reihenfolge mit je einem Elektron, so erhält man der Reihe nach alle chemischen Elemente. Nimmt man noch ein zweites Exemplar der Eigenwertfläche hinzu und besetzt die Eigenwertpunkte der einen Fläche mit Protonen, die der anderen mit Neutronen, so erhält man eine Darstellung der Atomkerne auf der „Kernfläche“. (2. vgl. dies. Zbl. 24, 64.) *van der Waerden (Leipzig).*

Gombás, Paul: Zur Berechnung von Atomtermen. Z. Physik 119, 318—324 (1942).

Erweiterung früherer Rechnungen (vgl. dies. Zbl. 26, 38) durch Berücksichtigung der Austauschwechselwirkung zwischen Valenzelektronen und Rumpfelektronen. Termberechnungen für Na, K, Ca, Al⁺, Al⁺⁺, Ca⁺. *F. Hund (Leipzig).*

Kovács, I., und S. Singer: Über die Wechselwirkung von drei Spektraltermen. Physik. Z. 43, 362—371 (1942).

Die Säkulargleichung dritten Grades, auf die das Störungsproblem der Wechselwirkung von drei Spektraltermen führt, wird in Reihenform gelöst, und die Lösung wird an bandenspektroskopischen Beispielen illustriert. *F. Hund (Leipzig).*

Kellermann, E. W.: On the specific heat of the sodium chloride crystal. Proc. roy. Soc., Lond. A 178, 17—24 (1941).

In einer früheren Untersuchung des Verf. [Philos. Trans. A 238, 513—548 (1940)] war eine große Zahl von Eigenfrequenzen des Steinsalzgitters bestimmt worden. Aus ihnen läßt sich die Verteilungsfunktion für die Eigenfrequenzen über das Spektrum bestimmen und daraus durch Multiplikation mit der einem harmonischen Oszillator entsprechenden spezifischen Wärme und durch Integration über alle Frequenzen die spezifische Wärme von Steinsalz gewinnen. Verf. erhält so Kurven, welche mit den experimentell gefundenen Werten in guter Übereinstimmung sind und im besonderen die Schwierigkeiten der Debyeschen Theorie (scheinbare Nichtkonstanz der charakteristischen Temperatur) in Ordnung bringen. *Sauter (München).*

Landau, L.: Theory of the superfluidity of helium. 2. Phys. Rev., II. s. 60, 356—358 (1941).

Aus allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik eines beliebigen Systems von miteinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen leitet Verf. den Satz ab, daß $\text{rot } v$ (als Operator) nur dann mit dem Hamiltonoperator vertauschbar ist, wenn $\text{rot } v = 0$. Dies bedeutet, daß eine Potentialströmung auch im Sinn der Quantenmechanik ein stationärer Zustand ist. Ferner muß zwischen den Zuständen mit Wir-

beln und denen mit der Potentialströmung eine Energielücke bestehen, wobei plausiblerweise erstere als energetisch höher angenommen werden. Die allgemeine Bewegung einer Flüssigkeit wird nun als Überlagerung von Potentialströmungen und Flüssigkeitswirbeln angesehen von der Art, daß bei tiefen Temperaturen praktisch nur wirbelfreie Strömungen auftreten. Dieser Fall wird als der des flüssigen He II angesprochen. Durch geeignete Annahmen über die Energielücke und die Energie der Flüssigkeitswirbel kann man dann eine Übergangstemperatur von $2,3^\circ$ ermitteln, welche der beobachteten bei $2,19^\circ$ K entsprechen soll. Wegen der Einzelheiten wird auf eine Arbeit im J. of Physics USSR verwiesen. *Sauter (München).*

Sampson, J. B., and Frederick Seitz: Theoretical magnetic susceptibilities of metallic lithium and sodium. Phys. Rev., II. s. 58, 633—639 (1940).

Zusammenstellung der verschiedenen Beiträge (Paramagnetismus der Valenzelektronen, Austauscheffekt, Diamagnetismus der Valenzelektronen und des Ionenrumpfes) zur magnetischen Suszeptibilität von Metallen. Im besondern ergibt sich bei Natrium einigermaßen Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, während bei Lithium die Theorie einen mehr als doppelt so großen Wert liefert. *Sauter.*

Brown jr., William Fuller: Theory of the approach to magnetic saturation. Phys. Rev., II. s. 58, 736—743 (1940).

Für das Einmünden der Magnetisierung in die technische Sättigung wird im allgemeinen ein Gesetz der Form $M = M_s - b/H^2$ angegeben, zu dem nach den Experimenten meist noch ein Glied $-a/H$ hinzutritt. Es wird nun gezeigt, daß man zu einem Gesetz der Form $M = M_s - a/H^{n/2}$ kommt, wenn man annimmt, daß die richtenden Kräfte sich in kleinen Bereichen rasch ändern. Dabei ist $n = 1, 2$ oder 3 , je nachdem sich diese Kräfte nur in der Nähe eines Punktes, einer Linie oder einer Ebene merklich auswirken. *Sauter (München).*

Brooks, Harvey: Ferromagnetic anisotropy and the itinerant electron model. Phys. Rev., II. s. 58, 909—918 (1940).

Um die Brauchbarkeit der in der metallischen Leitfähigkeitstheorie verwendeten Eigenfunktionen auch in der Theorie des Ferromagnetismus zu zeigen, wird mit ihnen die Richtungsabhängigkeit der Magnetisierungsenergie bei kubischen Kristallen und im besonderen die in der bekannten Energieformel bei den Gliedern 4. Ordnung in den Richtungskosinus auftretende Konstante K ermittelt. Den Ausgangspunkt bilden die Blochschen Wellenfunktionen für d -Elektronen, und als Störung wird außer dem periodischen Gitterpotential noch die Bahn-Spin-Wechselwirkung eingeführt, während die Austauschkräfte durch ein inneres Weißches Feld beschrieben werden. Die Rechnungen ergeben bei Ni und Fe für K die richtige Größenordnung und das richtige Vorzeichen. Für den aus den gyromagnetischen Messungen bekannten g -Faktor findet Verf. bei Ni den Wert 1,97, während der gemessene etwas weniger von 2 abweicht.

Sauter (München).

Holstein, T., and H. Primakoff: Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. Phys. Rev., II. s. 58, 1098—1113 (1940).

Es wird die Magnetisierung im Gebiet von der technischen Sättigung bis zur absoluten Sättigung in Abhängigkeit von H und T berechnet bei Berücksichtigung nicht nur der gewöhnlichen Austauschwechselwirkung, sondern auch der magnetischen Wechselwirkung zwischen den Elektronenspins verschiedener Atome. Dies würde klassisch der Mitnahme des Lorentzschen Zusatzfeldes $4\pi M/3$ entsprechen. Es ergibt sich jedoch nur für extrem große Feldstärken nach beiden Methoden der gleiche Wert für die Suszeptibilität; für Feldstärken hingegen, die vergleichbar oder klein gegen $4\pi M$ sind, liegt der quantenmechanische Wert wesentlich über dem klassischen. Für $T = 287^\circ$ und $H = 4000$ Oerst. etwa unterscheiden sie sich um einen Faktor 10. Dabei scheint der quantenmechanische Wert die experimentell gefundenen Verhältnisse bei Ni und Fe besser wiederzugeben als der klassische. *Sauter (München).*

Smoluchowski, R.: On the theory of volume magnetostriction. Phys. Rev., II. s. 59, 309—317 (1941).

Im Gegensatz zu der bisherigen Behandlungsmethode der Magnetostriction von Becker und Kornetzki, in der die Sättigungsmagnetisierung am absoluten Nullpunkt als volumunabhängig angenommen wird, betrachtet Verf. letztere als volumabhängig. Dafür muß er aber jetzt, um überhaupt zu brauchbaren Ergebnissen zu gelangen, sich in der Weißschen Theorie auf eine spezielle Langevin-Funktion festlegen, was in der bisherigen Methode nicht nötig war. Im besonderen betrachtet Verf. die beiden Funktionen $L_{1/2}$ (entsprechend einzelnen Elektronen mit Spin) und L_1 (als Kopplung je eines Elektronenpaares gedeutet). Überraschenderweise scheint die zweite L -Funktion in den vom Verf. untersuchten Anwendungen die Ergebnisse besser wiederzugeben als die erste. *Sauter* (München).

Herring, Conyers: A new method for calculating wave functions in crystals. Phys. Rev., II. s. 57, 1169—1177 (1940).

Die vom Verf. vorgeschlagenen neuen Wellenfunktionen für die Metallelektronen stellen eine Linearkombination aus ebenen Wellen und Eigenfunktionen von an die einzelnen Gitterionen gebundenen Elektronen dar, die so gewählt werden, daß sich die zugehörige Säkulardeterminante möglichst gut und einfach lösen läßt. Dabei wird auch der Potentialverlauf in den einzelnen Ionen schwach modifiziert, um bessere Konvergenz zu erzielen. *Sauter* (München).

Gentile j., Giovanni: Le statistiche intermedie e le proprietà dell'elio liquido. Nuovo Cimento, N. s. 19, 109—125 (1942).

Die Entartung eines Gases wird betrachtet unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in einer Zelle des Phasenraumes höchstens soviel Teilchen sein können, als das Gas Molekeln hat, unter Benutzung der „intermediären Statistik“ des Verf. (dies. Zbl. 25, 284). Erscheinungen bei der Umwandlung der beiden flüssigen Phasen des Heliums können so gedeutet werden. *F. Hund* (Leipzig).

Bartlett jr., J. H., and T. A. Welton: The scattering of fast electrons by heavy elements. 2. Phys. Rev., II. s. 59, 281—290 (1941).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit von J. H. Bartlett und R. E. Watson [Phys. Rev. 56, 612 (1939)], in der die Streuung von schnellen Elektronen an Hg-Kernen untersucht wurde, wird nunmehr der zusätzliche Einfluß der Hg-Elektronenhülle auf die elastische Streuung betrachtet; dabei beschränken die Verff. die numerischen Rechnungen auf die beiden Fälle von 100 und 230 kV-Elektronen. Der abschirmende Einfluß der Elektronenhülle, der sich im ersten Fall nur für Streuwinkel unter 60° , im zweiten Fall für solche unter 15° auswirkt, wird durch eine Hartreesche Potentialfunktion beschrieben, welche in die Diracgleichung eingesetzt wird. Letztere wird nach drei verschiedenen Methoden behandelt: 1. durch Integration mit dem Differentialanalysator, 2. nach der WKB-Methode und 3. nach dem Bornschen Näherungsverfahren in erster Ordnung. Die Resultate, die relativ gut untereinander übereinstimmen, sind in Tabellenform wiedergegeben (vgl. dies. Zbl. 25, 285). *Sauter*.

Hellund, E. J.: Phase series. Phys. Rev., II. s. 59, 395—399 (1941).

Die wellenmechanische Behandlung des Zusammenstoßes eines Massenpunktes gegen ein Zentralfeld wird bekanntlich auf die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der regulären Lösungen der radialen Schrödingergleichungen zurückgeführt. Verf. löst dieses Problem durch eine Reihenentwicklung, die die Bornsche Entwicklung nach Potenzen des Wechselwirkungsparameters als Spezialfall enthält. Verf. beweist die Konvergenz des Verfahrens. Für die praktische Lösung von konkreten Beispielen ist jedoch die Methode, nach Verf. Meinung, der üblichen numerischen Integration nicht überlegen. *Wick* (Rom).

Mooney, Robert Lee: Elastic scattering in helium at 15° C. Phys. Rev., II. s. 58, 871—873 (1940).

Frühere Rechnungen von Massey und Mohr (dies. Zbl. 7, 269; 8, 384) über

die Streuung von Helium an Helium werden wiederholt unter Verwendung einer neuen von H. Margenau (dies. Zbl. 21, 280) gegebenen Wechselwirkungsfunktion zwischen Heliumatomen. Die numerischen Rechnungen werden für eine Relativgeschwindigkeit der Teilchen, entsprechend einer Temperatur von 15°C ausgeführt, ohne die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung zu berücksichtigen. *Sauter.*

Relativistische Quantentheorie:

Bothe, W.: Die Diffusion von einer Punktquelle aus. (Nachtrag zu der Arbeit „Einige Diffusionsprobleme“.) Z. Physik 119, 493—497 (1942).

Als Nachtrag zu einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 26, 172) wird ein exakter Ausdruck abgeleitet für die Dichteverteilung in einem unendlich ausgedehnten, streuenden und absorbierenden Mittel, welches eine Punktquelle enthält. *Glaser (Prag).*

Uehling, E. A.: The density distribution in the steady-state diffusion of neutrons. Phys. Rev., II. s. 59, 136—143 (1941).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 27, 44) über die aus einem Neutronenstreuer und -absorber austretende Neutronenverteilung berechnet Verf. hier einen exakten Ausdruck für die Neutronenverteilung innerhalb des Streuers. Die Rechnung gilt für die stationäre Neutronendiffusion in einem unendlichen, isotropen und homogenen Streuer, der einen Halbraum erfüllt, mit ebener Grenzfläche unter Voraussetzung isotroper Wechselwirkung der Neutronen mit den Streueratomen ohne Energieaustausch. Der einfallende Neutronenstrom soll symmetrisch im Azimut um die Normale auf der Streueroberfläche und nur eine Funktion des Polwinkels sein, während die im Streuerinneren außerdem vorhandene Quellenverteilung isotrop sei und nur vom senkrechten Abstand der Grenzfläche abhängen soll. Unter diesen Umständen geht die Neutronengeschwindigkeit nur als Parameter in die Rechnung ein und die Verteilungsfunktion der Neutronendichte hängt nur vom Grenzflächenabstand und der Richtung des Geschwindigkeitsvektors ab. Bei der Durchführung der Rechnung macht Verf. ausgiebigen Gebrauch von Laplace- bzw. Mellintransformationen und von komplexer Integration; dadurch gelingt ihm die Auflösung der aus dem Problem entspringenden Integralgleichung ohne Reihenentwicklung und die Darstellung der Lösung als bestimmtes, durch numerische Auswertung zu lösendes Integral. *Kojink.*

Badarau, G., et E. Stihl: Sur la théorie quantique de la désintégration radioactive. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 24, 297—300 (1942).

Unter der Annahme, daß die Wände des Potentialtopfes unendlich steil und im Innern des Kerns das Potential konstant ist, läßt sich die Beziehung zwischen der Halbwertszeit und der Energie des α -Teilchens streng berechnen. Drückt man die Wellenfunktion des α -Teilchens im Gebiete der coulombschen Abstoßung durch die Whittaker-Funktionen aus und benützt man die Gamowsche Methode der komplexen Eigenwerte, so wird die Rechnung erheblich vereinfacht; das Ergebnis bleibt immer noch zu unübersichtlich, um für numerische Rechnungen brauchbar zu sein.

S. Tifeica (Iasi).

Wentzel Gregor: Zur Paartheorie der Kernkräfte. Helv. phys. Acta 15, 111 bis 126 (1942).

Das Verfahren zur Berechnung der Kräfte zwischen Kernteilchen in der Paartheorie (vgl. dies. Zbl. 26, 190) wird vereinfacht und verallgemeinert. Dabei wird ein skalares Materiefeld mit ruhenden Protonen gekoppelt, eine Abschneidevorschrift eingeführt und die Energie eines Protons, zweier Protonen und eines Protonengitters berechnet. Die Reichweite der Kräfte erweist sich als im wesentlichen durch die Abschneidelänge bestimmt, während die Masse der Feldteilchen nur untergeordnete Bedeutung hat.

F. Hund (Leipzig).

Konopinski, E. J., and G. E. Uhlenbeck: On the Fermi theory of β -radioactivity. 2. The „forbidden“ spectra. Phys. Rev., II. s. 60, 308—320 (1941).

Um die Übergangswahrscheinlichkeit und das Elektronenspektrum eines ver-

botenen β -Übergangs auszurechnen, hat man die Änderung der Elektronen- und Neutrino wellenfunktionen im Kern zu berücksichtigen, indem man in bekannter Weise die Wellenfunktion e^{ikr} nach Potenzen von r entwickelt. Matrixelemente, die nur nicht verschwinden, falls man r, r^2, \dots berücksichtigt, gehören zu erst-, zweit-... verbotenen Übergängen. Für die verschiedenen Kopplungsfälle der Fermischen Theorie (Skalar, Vektor, Tensor, Pseudovektor, Pseudoskalar) werden diese Matrixelemente diskutiert. Die sich so ergebenden Spektren hängen allerdings im allgemeinen noch von unbekannten, speziellen Struktureigenschaften der betreffenden Kerne ab. — Die Resultate werden mit den experimentellen Spektren von Na^{24} (erst-verboten) und P^{32} , RaE (zweit-verboten) verglichen. Die Tensor-Kopplung scheint der Erfahrung am ehesten zu entsprechen, obwohl hier noch unbekannte Verhältnisse zwischen gewissen Matrixelementen ins Resultat eingehen. [Teil 1.: Phys. Rev. II s. 48, 7—12 (1935).]

M. Fierz (Basel).

Stueckelberg, E. C. G.: La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta. Helv. phys. Acta 15, 23—37 (1942).

Es werden die folgenden Gleichungen diskutiert:

$$(1) \quad \ddot{q}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + e B^{\mu\nu} \dot{q}_\nu,$$

dabei ist $\dot{q} = \frac{dq}{d\lambda}$, und λ ist ein Parameter. $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$ ist der Tensor des elektromagnetischen Feldes. Die Gleichungen folgen aus einem Variationsprinzip $\delta \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda L = 0$,

wenn für L_{mat} , d. h. für den Anteil, der der Teilchenbewegung \dot{q}^μ zugeordnet ist, der Ansatz $L_{\text{mat}} = \frac{1}{2} \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu$ gemacht wird. $-2L_{\text{mat}} = m^2$ ist eine Konstante der Bewegung. Man kommt auf die übliche Form der Bewegungsgleichung zurück, wenn $ds = \pm m d\lambda$ gesetzt wird. Die beiden Vorzeichen entsprechen den Ladungsvorzeichen $\pm e$. Führt man in (1) noch besondere Kräfte K^μ ein (die bis jetzt allerdings nicht beobachtet wurden), so ist m^2 nicht mehr konstant und kann insbesondere verschwinden bzw. das Vorzeichen wechseln. Solche Bahnkurven werden dann aufgefaßt als Beschreibung einer Paarerzeugung durch das Kraftfeld K_μ . Die Theorie wird in formaler Weise quantisiert, indem zu sämtlichen q^μ kanonische Variablen p^μ eingeführt werden:

$$q^\mu, p^\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q^\mu}. \quad \text{— Verf. versucht eine Deutung der so entstehenden Theorie.}$$

M. Fierz (Basel).

Tonnellat, Marie-Antoinette: Théorie de la particule de spin maximum 2. Les tenseurs symétriques du second rang. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 253—256 (1942).

Als Analogon des Energie-Impulstensors werden drei symmetrische Tensoren zweiter Ordnung definiert, deren Komponenten hermitesche Formen der Wellenfunktion Φ und ihrer Ableitungen sind. Diese Tensoren sind gleich, wenn Φ eine ebene Welle darstellt. Die Übereinstimmung bleibt nicht bestehen für eine beliebige Form der Welle. Beschränkt man sich auf den Fall des Spins $s = 1$, so unterscheiden sich die Tensoren nur durch Divergenzausdrücke; die vom physikalischen Standpunkt allein wichtigen Integrale der Tensorkomponenten sind also auch in diesem Fall gleich.

S. Titeica (Iasi).

Pais, A.: On the electric charge current density of a nuclear system. (Phys. Laborat., Univ., Utrecht.) Physica, Haag 9, 407—421 (1942).

Der Energie-Impulstensor eines Systems von Nukleonen und von Mesonfeldern wird abgeleitet. Die Mesonfelder sind eine Kombination eines Vektor- und eines Skalarfeldes nach Møller-Rosenfeld, die sich formal als Vektorfeld in einem 5-dimensionalen Raume auffassen läßt. Die „statischen“ Felder werden durch eine unitäre Transformation abgespalten. Ausdrücke für das elektrische und magnetische Dipolmoment sowie für das Quadrupolmoment werden angegeben.

M. Fierz.

Pauli, W.: The connection between spin and statistics. Phys. Rev., II. s. 58, 716—722 (1940).

Man betrachte homogene, lineare Feldgleichungen, deren Grad beliebig sein kann.

Die entsprechenden Feldgrößen sollen durch Spinoren beschrieben werden. Diese Spinoren können eine gerade oder ungerade Anzahl von Indizes besitzen. Da die Differentiation die „Parität“ eines Spinors nicht ändert (d. h. die Anzahl der Indizes bleibt gerade oder ungerade), so kann ein Lorentz-invariantes Gleichungssystem nur Spinoren einheitlicher „Parität“ enthalten. Spinoren mit gerader Indexzahl gehören zu ganzzahligem Spin, solche mit ungerader Indexzahl zu halbzahligem Spin. — Man bilde nun Bilinearformen aus den Feldgrößen und deren Ableitungen. Diese entsprechen Tensorgrößen. Verf. gibt nun sowohl im Falle ganzzahliger Spins wie auch im Falle halbzahliger Spins eine Substitution an, bei welcher die Feldgleichungen invariant bleiben. Dabei drehen aber im ersten Falle alle Tensoren ungerader Stufe das Vorzeichen um, während diejenigen gerader Stufe invariant bleiben. Im Falle halbzahliger Spins ist es gerade umgekehrt. — Falls man fordert, daß die totale Feldenergie stets positiv sein soll, und daß in der c -Zahl-Theorie unabhängige Feldgrößen zu gleicher Zeit und an verschiedenen Orten in der g -Zahl-Theorie vertauschbar sein sollen, kann hieraus gefolgert werden, daß Teilchen mit ganzem Spin der Bosestatistik, Teilchen mit halbzanem Spin der Fermistatistik genügen müssen. Der Verf. ist der Ansicht, daß dieser Zusammenhang von Spin und Statistik eine der wichtigsten Folgerungen der speziellen Relativitätstheorie sei. M. Fierz (Basel).

Hill, E. L.: The spin angular momenta of elementary particles. Phys. Rev., II. s. 57, 1184 (1940).

Verf. untersucht die Frage, ob sich in einer Feldtheorie für Teilchen mit Spin $> \frac{1}{2} \hbar$ ein „Spinoperator“ \vec{S} definieren läßt, dessen Quadrat lorentzinvariant ist. Die Antwort ist negativ. M. Fierz (Basel).

Astrophysik.

Bruggeneate, P. Ten: Eruptionen und Protuberanzen auf der Sonne. Ber. naturforsch. Ges., Freiburg i. Br. 37, 180—183 (1942).

Bericht über einen Vortrag, der den Zusammenhang der periodisch veränderlichen Sonnenaktivität (Flecken, Eruptionen, Protuberanzen) mit geophysikalischen Erscheinungen (Ionisation der höchsten Atmosphärenschichten durch kurzwellige Strahlung, deren Rückwirkung sowie direkte Einflüsse solarer Korpuskeln auf das Magnetfeld der Erde) behandelt und die große Bedeutung aufzeigt, die diese Erkenntnisse neben den direkten Beobachtungsmethoden (insbesondere Aufnahmen im Licht der $H\alpha$ -Linie) für die Sonnenphysik besitzen. Wempe (Jena).

Alfvén, Hannes: On the cosmogony of the solar system. Stockholms Observat. Ann. 14, Nr 2, 1—33 (1942).

Die rein mechanischen Theorien der Entstehung des Planetensystems stoßen bekanntlich auf die Schwierigkeit, daß das Rotationsmoment der Sonne klein ist gegenüber dem Umlaufmoment der großen Planeten und daß die Wahrscheinlichkeit naher Begegnungen im Sternsystem, die zur Bildung eines Planetensystems führen könnten, sehr gering ist. Einen möglichen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten zeigt der Verf. in der Berücksichtigung elektromagnetischer Kräfte, deren Bedeutung durch den Hinweis erläutert wird, daß z. B. die durch das Magnetfeld der Sonne ausgeübte Kraft auf ein Proton in der Bahn und mit der Geschwindigkeit der Erde das 60000fache der auf dasselbe Teilchen wirkenden Gravitation beträgt. In einer früheren Arbeit des Verf. [Ark. Mat. Astron. Fys. 28 A, Nr 6 (1942)] ist gezeigt worden, daß ionisierte Materie in der Umgebung der Sonne durch das Magnetfeld zur Teilnahme an der Sonnenrotation gezwungen wird und daß bereits in Zeiten von der Größenordnung 10^6 Jahre ein beträchtlicher Teil des Rotationsmoments auf diese Weise übertragen werden kann. Da jedoch ionisierte Materie die nähere Umgebung der Sonne nicht erreichen kann, betrachtet der Verf. das Eindringen der Sonne in eine Wolke neutraler

Materie und berechnet aus der Beziehung $e \cdot V_i = \frac{k M m}{r}$ unter Annahme eines mittleren Ionisierungspotentials $V_i = 12$ Volt die Masse m der Teilchen, die in der Entfernung r des Jupiter ionisiert und dadurch dem Einfluß des Magnetfeldes unterworfen werden; es ergibt sich $m = 10$, etwa dem mittleren Atomgewicht der häufigsten Elemente entsprechend. Weiter wird die Anordnung und Dichteverteilung der ionisierten Materie in der Ebene des magnetischen Äquators untersucht und mit der Massenverteilung der äußeren Planeten verträglich gefunden. Für die Rekombination und Kondensation der ionisierten Materie wird auf eine von B. Lindblad (*A condensation theory of meteoric matter and its cosmological significance* [Nature **135**, 133 (1935)]) entwickelte Vorstellung hingewiesen; es ergeben sich ferner einige Aussagen über die Bahnen der neutralen Materie. Ähnliche Betrachtungen wie für die großen Planeten werden für die Entstehung der größeren Trabanten von Jupiter und Saturn und des Saturnringes angestellt; sie führen bei letzterem zu einer Darstellung der verschiedenen Teilungen. Auf die inneren Planeten läßt sich die vom Verf. entwickelte Kosmogonie nur unter der Annahme anwenden, daß die Materie zunächst als gröberer Staub in die nächste Umgebung der Sonne gelangt und erst dort verdampft. Auch aus einer Betrachtung der Massen- und Entfernungsverhältnisse benachbarter Planeten ergeben sich Hinweise darauf, daß für die Entstehung des Planetensystems nach dieser Vorstellung mit einer Ionenwolke und einer Staubwolke verschiedener Dichteverteilung gerechnet werden muß.

Wempe (Jena).

Spitzer jr., Lyman: The dynamics of the interstellar medium. 2. Radiation pressure. *Astrophys. J.* **94**, 232—244 (1941).

In der Nähe eines wenig heißen Sterns wird Staub dem Strahlungsdruck unterliegen, während Atome im allgemeinen unbeeinflusst bleiben. Ein sehr heißer Stern wird indessen den interstellaren Wasserstoff ionisieren, und wegen starker Wechselwirkung zwischen Protonen und Staub wird sich das Medium nunmehr wie ein homogenes Gas verhalten. Die Arbeit behandelt in 3 Abschnitten 1. die Wirkung einzelner Sterne auf das interstellare Medium, 2. die Wirkung des allgemeinen galaktischen Strahlungsfeldes, 3. sekundäre Wirkungen zwischen den einzelnen Teilchen des Mediums. Bei der Behandlung der Wirkung eines einzelnen Sterns ist die starke Streuung zu berücksichtigen, welcher die kurzwellige Strahlung innerhalb des Mediums unterliegt, bei der Untersuchung des allgemeinen galaktischen Feldes die Absorption nahe der galaktischen Hauptebene. Die Wirkung des allgemeinen Feldes kann als gering angesehen werden: beispielsweise wird in der Nähe der Sonne die galaktische Umlaufgeschwindigkeit eines Staubteilchens um 0,5% kleiner gefunden als diejenige eines Sterns. Die im 3. Abschnitt untersuchte Sekundärwirkung kommt dadurch zustande, daß Staubteilchen, die der Strahlungsquelle näher sind, einen Teil der Strahlung absorbieren und daher einer stärkeren Wirkung unterliegen als diejenigen, die in ihren Schatten gelangen können. Dieser Effekt führt allgemein zu einer Verdichtung der Wolken. Die Arbeit beschränkt sich im wesentlichen auf die Betrachtung grundsätzlicher Bedingungen, wogegen die Erlangung numerischer Ergebnisse zurücktritt.

C. Hoffmeister (Sonneberg). °°

Lindblad, Bertil: Remarks on the dynamical theory of spiral structure. *Stockholms Observat. Ann.* **14**, Nr 1, 1—32 (1942).

Fortsetzung der Arbeit des Verf. „On the development of spiral structure in a rotating stellar system“ (vgl. dies. Zbl. **26**, 48), die ein theoretisches Verständnis der Ausbildung der Spiralstruktur erstrebt, das weit über ältere Arbeiten hinausgeht. Durch eine in den Konsequenzen nicht immer überschaubare Fülle von sehr speziellen Näherungsannahmen wird für die Dichte eine einfache lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung hergeleitet, die in Verbindung mit einer geeigneten, auch nur genähert gültigen Randbedingung die Grundlage der Theorie bildet. Die vorliegende Arbeit verfolgt Einzelheiten bei der Ausbildung der Spiralarme, die ihren Anfang

nimmt aus gewissen instabilen Kreisbahnen unter dem Einfluß störender Kräfte. Zahlreiche beobachtete Eigenschaften der Spiralstruktur werden theoretisch behandelt. Kurze Inhaltsangabe nicht möglich. *Heckmann* (Hamburg-Bergedorf).

Greenfield, M. A.: The problem of energy production in red giants. *Phys. Rev.*, II. s. **60**, 175—183 (1941).

Die Energieerzeugung der Roten Riesen wurde von Gamow zurückgeführt auf die Umwandlung leichter Elemente (^2H bis ^{11}B) in Helium; dabei wurde die Gruppenbildung unter den Veränderlichen Sternen erklärt durch Zuordnung jeder Gruppe zu einem dieser Elemente. In der vorliegenden Arbeit wird diese Hypothese quantitativ verfolgt unter der Annahme, daß der Wasserstoffgehalt durchweg 35% beträgt und daß die Sterne in erster Näherung ähnlich aufgebaut sind. Hierzu beschränkt sich der Verf. auf die beiden Grenzfälle, daß entweder der Gasdruck oder der Strahlungsdruck vorherrscht. Er bestimmt für jede der in Betracht kommenden Kernreaktionen die Linie im Hertzsprung-Russell-Diagramm, auf der diese Reaktion gerade beginnt im Vergleich zur Kontraktionsenergie wichtig zu werden. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die verschiedenen Gruppen der δ Cephei-Sterne den Reaktionen von ^{10}B , ^{11}B und ^9Be zuzuordnen sind, die langperiodischen Veränderlichen dagegen den beiden Lithiumisotopen; ^2H kann keiner Gruppe zugeordnet werden. Der Massenanteil an ^{10}B bzw. ^{11}B oder ^9Be , der mindestens vorhanden sein muß, damit die Entwicklung des Sterns überhaupt nennenswert verlangsamt wird, ergibt sich zu etwa 10^{-5} bis 10^{-4} . Beobachtet werden in den Sternatmosphären im allgemeinen Werte um 10^{-7} bis 10^{-8} , gegen $\approx 10^{-1}$ bis 10^{-2} für die nächst schwereren Elemente; andererseits bleibt die beobachtete Konstanz der Perioden der Cephei δ -Sterne ohne subatomare Energiequelle gänzlich unverständlich. *L. Biermann* (Babelsberg).

Cowling, T. G.: The non-radial oscillations of polytropic stars. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **101**, 367—375 (1942).

Das für die Gezeitendeformation von Doppelsternen bedeutsame Problem nicht-radialer Schwingungen ist bisher nur für homogene Kugeln (Pekeris, vgl. dies. Zbl. **19**, 288) oder für polytrope Kugeln in unzureichender Näherung (Emden, Gaskugeln) behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit werden Gaskugeln von beliebigem Polytropenindex n betrachtet, der nicht durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = 1 + 1/N$ gegeben zu sein braucht. Durch die bei hinreichender Dichtekonzentration zulässige Annahme, daß das Potential durch die Deformationen nicht merklich geändert wird, reduziert sich das Problem auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Sturm-Liouvilleschen Typ. Es existieren im allgemeinen unendlich viele Lösungen mit sehr großer und mit beliebig kleiner Periode; die letzteren lassen sich im wesentlichen als radiale Druckschwankungen (p -Lösungen), die ersteren als horizontale Dichteschwankungen (g -Lösungen) kennzeichnen. Diese beiden Typen werden durch eine als f -Lösung bezeichnete Schwingung geschieden, bei der längs eines Radius Verschiebung und Dichteänderung stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Alle Perioden nehmen ab mit größerem n (stärkerer Konzentration) und mit kleinerem N (geringerer Kompressibilität). Für die Polytrope $n = 3$ werden die Perioden der f -Lösung und der größten g -Lösung unter den Annahmen $N = 3/2$ (eiatomiges Gas) bzw. $n - N$ sehr klein positiv durch numerische Integration berechnet, wobei die Wirkung der zunächst vernachlässigten Potentialänderung durch eine Störungsrechnung berücksichtigt wird. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf das Gezeitenproblem bei Doppelsternen zeigt, daß das Eintreten von Resonanz unwahrscheinlich ist. Ferner wird die von P. H. Taylor [*Astrophys. J.* **94**, 46 (1941)] vertretene Ansicht bestritten, daß die bei Bedeckungsveränderlichen beobachtete Asymmetrie der Lichtkurve auf Resonanzschwingungen schließen lasse, und eine andere Erklärung für diese Erscheinung vorgeschlagen. Schließlich wird die Anwendbarkeit der Resonanztheorie auf die Entstehung des Erdmondes diskutiert. *Wempe* (Jena).